

UNIVERSITATEA DE VEST
Facultatea de Științe Economice

Constantin Chilărescu

O. Ciorîcă R. Herbei C. Preda

N. Surulescu C. Șipoș

Bazele Statisticii

Partea I

Teoria Probabilităților

2001

Prefață

...

Timișoara, ...

Cuprins

Introducere	7
0.1 Considerații generale	7
0.2 Scurt istoric al teoriei probabilităților	9
1 Noțiuni fundamentale ale teoriei probabilităților	11
1.1 Experiențe și evenimente aleatoare	11
1.2 Relații și operații elementare pe mulțimea evenimentelor aleatoare	16
1.3 Frecvențe relative și definiția statistică a probabilității	21
1.3.1 Definiția clasică a probabilității	21
1.3.2 Definiția axiomatică.	26
1.4 Independența și condiționarea evenimentelor aleatoare	30
1.4.1 Independența evenimentelor aleatoare	30
1.4.2 Probabilități condiționate	34
1.5 Metode de numărare	38
1.5.1 Principiul multiplicării	38
1.5.2 Elemente de analiză combinatorie	39
1.6 Scheme Clasice de Probabilitate.	41
1.6.1 Schema lui Bernoulli (sau Schema bilei revenite)	41
1.6.2 Schema multinomială	44
1.6.3 Schema bilei nerevenite	46
1.6.4 Schema generalizată a bilei nerevenite	47
1.6.5 Schema lui Poisson	48
1.7 Exerciții și probleme	50
2 Var. aleat.-December 5, 2001	57
2.1 Funcții de repartiție	65
2.2 Variabile și vectori aleatori continui	69
2.2.1 Variabile Aleatoare Independente	71

2.3	Caracteristici numerice asociate variabilelor aleatoare.	74
2.3.1	Medii și momente pentru variabile discrete	74
2.3.2	Medii și momente pentru variabile continue	76
2.3.3	Dispersia variabilelor aleatoare.	78
2.3.4	Inegalități importante în studiul variabilelor aleatoare .	80
2.4	Covarianță și Corelație.	83
2.5	Funcții caracteristice și funcții generatoare	86
2.6	Exerciții și probleme	90
3	Repart. clasice., December 5, 2001	95
3.1	Repartiții discrete	95
3.1.1	Repartiția binomială	95
3.1.2	Repartiția Poisson	99
3.1.3	Repartiția hipergeometrică	102
3.1.4	Repartiția geometrică	103
3.2	Repartiții continue	104
3.2.1	Repartiția uniformă	104
3.2.2	Repartiția Normală	106
3.2.3	Repartiția Log-Normală	110
3.2.4	Repartiția Gamma	110
3.2.5	Repartiția exponențială	112
3.2.6	Repartiția χ^2	113
3.2.7	Repartiția Student	115
3.2.8	Repartiția Fisher-Snedecor	115
3.3	Proprietăți asimptotice	116
3.3.1	Tipuri de convergențe	116
3.4	Legi ale numerelor mari și Teorema Limită Centrală	119
3.5	Exerciții și probleme	122
	Bibliografie	124

Introducere

0.1 Considerații generale

În multe studii științifice asupra fenomenelor economice, fizice etc., se caută modele matematice cât mai performante, cu ajutorul cărora să se poată descrie sau prognoza anumite valori de interes pentru fenomenul studiat. Este binecunoscut faptul că, spre exemplu, în fizică și în chimie întâlnim foarte multe modele matematice ce descriu fenomene care, repetate în condiții ideale, furnizează în mod esențial aceleași rezultate de fiecare dată. De pildă, considerând fenomenul căderii libere a unui obiect material, binecunoscuta formulă $v = g \cdot t$ (g fiind accelerația gravitațională) ne furnizează un model matematic foarte util pentru descrierea vitezei v de cădere liberă a respectivului obiect. Acesta este un exemplu de *model determinist*. Astfel de modele nu sunt însă adecvate atunci când experimentele se efectuează în condiții mai puțin ideale. În astfel de condiții apar variabile incontrollabile, cum ar fi temperatura aerului, umiditatea, erorile de măsurare etc., care pot afecta destul de mult rezultatul experimentului. În plus, a încerca să construim un model determinist care să ia în calcul toți acești factori perturbatori se dovedește a fi în general o sarcină imposibilă.

Necesitatea elaborării unor modele matematice și pentru astfel de situații nedeterminate motivează studiul probabilităților. Modelele matematice construite în acest cadru vor fi numite *modele probabiliste*. Câteodată, pentru desemnarea unor astfel de modele, în locul termenilor *probabilistic*, *probabiliste* se utilizează termenii *stochastic*, *stochastic* datorită faptului că în limba greacă cuvântul *stochos* înseamnă *ghicire*.

Teoria probabilităților studiază legile după care evoluează fenomenele aleatoare. Despre un fenomen se spune că este *aleator* dacă, repetându-l de mai multe ori, rezultatul obținut la fiecare repetare se schimbă de o manieră imprevizibilă.

Câteva exemple de fenomene aleatoare: extragerile loto, jocurile de noroc, procentul de rebuturi la fabricarea unui anumit produs, tragerile la țintă, etc.

Să luăm, de pildă, din categoria jocurilor de noroc acele jocuri care au la bază experiența de aruncare a zarului: rezultatul experimentului este dat de cifra arătată de zar la oprire. Un astfel de rezultat nu poate fi prevăzut, deoarece el depinde de o mulțime de factori întâmplători, cum ar fi poziția în momentul aruncării, impulsul inițial dat zarului, particularitățile fizice ale fețelor, etc.

De asemenea, analizând producția oricărei firme, se constată ușor că articolele de același tip diferă între ele într-o oarecare măsură (de exemplu, în producția becurilor electrice, durata de ardere a becului este diferită pentru becuri diferite). Nici măcar în cazul tragerilor la țintă cu o armă, glonte nu va nimeri totdeauna în mijlocul țintei.

În toate aceste cazuri este evident că nu putem prevedea dinainte rezultatul experimentului.

Orice fenomen, fie el și determinist, este întodeauna însoțit de perturbări aleatoare. Totuși, în anumite aplicații practice se pot neglija aceste elemente aleatoare înlocuind fenomenul real printr-un model (adică o schemă simplificată) și presupunând ca în condițiile date ale experienței avem o derulare bine determinată. Printre multitudinea factorilor care intervin în fenomenul studiat se selecționează cei mai importanți (cei fundamentali și decisivi) și se neglijează pur și simplu influența celorlalți factori. Aceasta este metoda uzuală de studiu chiar și în cazul diferitelor fenomene ce apar în fizică, chimie, mecanică, etc.

Utilizarea matematicii în studiul fenomenelor aleatoare se bazează pe faptul că în multe cazuri *șansa apariției unuia sau altuia dintre rezultatele experimentului poate fi evaluată cantitativ*, adică poate fi exprimată printr-un număr p . Un prim indiciu în acest sens este faptul că la repetarea în aceleași condiții de un număr mare de ori a unei experiențe aleatoare, frecvența relativă de apariție a rezultatului considerat (adică raportul dintre numărul de încercări în care s-a obținut acest rezultat și numărul total al încercărilor efectuate) rămâne tot timpul aproximativ aceeași, apropiată de o valoare constantă p . Acest număr se numește *probabilitatea* de apariție a rezultatului considerat. Existența unei astfel de probabilități este, desigur, independentă de efectuarea experimentelor. De aceea, ne putem întreba dacă probabilitățile nu pot fi calculate și fără a efectua vreun experiment. Se constată că într-o serie de cazuri acest lucru se poate face, plecând direct de la natura experimentului considerat. Într-o astfel de situație, obiectul experimentului

prezintă, în general, o anumită simetrie, iar calculul probabilității de apariție a unui rezultat oarecare se bazează pe considerații de analiză combinatorie, deseori destul de complexe.

0.2 Scurt istoric al teoriei probabilităților

Rudimente de idei probabiliste, în legătură cu jocurile de zaruri și de cărți conduc înapoi, spre mijlocul secolului al XVI-lea, la **Gerolamo Cardano** (1501-1576). În cartea sa despre jocurile cu zaruri apărută postum, Cardano calcula șansele de apariție a numerelor pare la aruncarea cu zarul în contextul discuțiilor relative la pariurile corecte. El a introdus ideea *numărului de rezultate egal posibile* la efectuarea unei experiențe aleatoare.

În secolele următoare, în afara dezvoltării unor metode combinatoriale de calcul, nimic semnificativ nu s-a mai întâmplat până la binecunoscuta serie de scrisori schimbate de **Pierre de Fermat** (1601-1665) și **Blaise Pascal** (1623-1662) în legătură cu probabilitățile asociate jocurilor de noroc. În aceste scrisori s-au pus bazele teoriei probabilităților ca instrument sistematic de rezolvare a problemelor legate de jocurile de noroc. Lui Pascal și Fermat li se atribuie primul răspuns corect la o problemă mai veche legată de împărțirea mizelor când un joc corect este oprit înainte ca vreunul din jucători să câștige.

Următorul reper istoric important a fost cartea lui **Christian Huyghens** (1629-1695), *How to reason in dice games*, care s-a dovedit a fi prima carte de probabilități despre jocurile de noroc, mai larg raspândită. Huyghens a introdus regulile de bază ale adunării și înmulțirii probabilităților.

Următoarea carte importantă de probabilități, intitulată *The art of conjecturing* a fost scrisă de **James Bernoulli** (1654-1705), dar publicată abia în 1713 de către nepotul său Nicolas. Cartea a însemnat un punct de reper pentru teoria probabilităților, căci a mers dincolo de probabilitățile asociate cu jocurile de noroc și a demonstrat prima dintre așa-numitele *teoreme limită*, cunoscută azi ca *legea numerelor mari*, ca justificare a folosirii frecvențelor relative la aproximarea probabilității reale de realizare a unui eveniment aleator. Această direcție a fost preluată de **Abraham de Moivre** (1667-1754), care a demonstrat în cartea sa *La doctrine des chances* (publicată în 1718) a doua teoremă limită, cunoscută azi ca *teorema limită centrală*. De Moivre a formalizat pentru prima dată noțiuni importante, ca *independența evenimentelor aleatoare* și *probabilitățile condiționate*.

Pierre Simon Laplace (1749-1827) a sistematizat și a extins în cartea

sa *La théorie analytique des probabilités* (1812) rezultatele de până atunci, cu privire la calculul probabilităților asociate cu jocurile de noroc și teoremele limită. Laplace și **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) au fondat așa-numita *teorie a erorilor*, care leagă teoria probabilităților de modelarea datelor observate, operaționalizând efectul teoremei limită centrală și introducând metoda *celor mai mici pătrate*. La aceasta s-a ajuns considerând erorile observațiilor ca efectul cumulativ al multor erori independente. Dominația distribuției normale a început cu Laplace și Gauss (de aici denumirea de *distribuție gaussiană*) și continuă până în zilele noastre. Sintetizarea teoriei probabilităților făcută de Laplace a furnizat bazele statisticii matematice.

În secolul al XIX-lea, teoria probabilităților a fost identificată cu teoremele limită, iar linia despărțitoare dintre probabilitatea unui eveniment și frecvența sa relativă de realizare într-un șir de încercări, era încă destul de neclară. Totuși, utilitatea teoriei probabilităților a început să se facă simțită în foarte multe domenii de activitate. Spre exemplu, în jurisprudența și științele sociale era folosită la analizarea datelor reale despre populație, mortalitate, natalitate, riscuri etc.

Bazele teoriei probabilităților, construite până atunci doar după modelul jocurilor de noroc, s-au dovedit complet inadecvate pentru noile aplicații ale probabilităților, iar căutarea de noi fundamente a început cu **L. P. Cebâșev** (1821-1884) și a fost extinsă de discipolii săi **A. A. Markov** (1856-1922) și **A. M. Liapunov** (1857-1918). Cebâșev a introdus noțiunea de variabilă aleatoare și a deschis mai multe direcții de cercetare, cu doar patru publicații. Studenții săi, Markov și Liapunov, au acceptat provocarea și au reușit să obțină rezultate remarcabile în teoria probabilităților. Influența lor se vede mai ales în teoremele limită, unde au dezvoltat noi metode - revoluționare pentru acea vreme - de studiu al comportării asimptotice a sumelor de variabile aleatoare independente.

Fundațiile matematice ale teoriei moderne a probabilităților au fost puse de **Andrei Nikolaevici Kolmogorov** (1903-1989), în cartea sa despre bazele teoriei probabilităților, publicată pentru prima dată în 1933. Această lucrare stabilește riguros teoria probabilităților ca parte a matematicii și furnizează un cadru general de dezvoltare pentru analiza statistică modernă, fondată cu un deceniu mai devreme de **Ronald A. Fisher** (1890-1963).

Capitolul 1

Noțiuni fundamentale ale teoriei probabilităților

1.1 Experiențe și evenimente aleatoare

Termenul **experiență** se referă în general la procesul (sau operația) în urma căruia se obține un rezultat observabil în cadrul unui anumit fenomen supus cercetării. Această terminologie are prin urmare sensul uzual din vorbirea curentă.

În teoria probabilităților, interesează în primul rând situațiile dominate de incertitudine în ce privește rezultatul ce urmează a se obține în urma efectuării experienței. Vom presupune în cele ce urmează că o astfel de experiență poate fi repetată de oricâte ori în aceleași condiții și că mulțimea Ω a tuturor rezultatelor sale posibile poate fi complet specificată înaintea efectuării experienței. Experiențele care verifică aceste condiții se numesc **experiențe aleatoare**.

În funcție de context, vom atribui experiențelor aleatoare diverse simboluri, cum ar fi:

- $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{E}_M$, $\mathcal{E}_Z$, etc. când e vorba de a analiza o singură experiență aleatoare, de regulă foarte simplă;
- $\mathcal{E}_{n*\mathcal{G}}$, $\mathcal{E}_{n*\mathcal{G}^m}$, $\mathcal{E}_{n*Z}$, $\mathcal{E}_{n*Z^m}$, $\mathcal{E}_{n*M}$, $\mathcal{E}_{n*M^m}$, (cu n și m numere naturale nenule) $\dots$, sau $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\dots$, etc., când se analizează experiențe aleatoare construite pe baza altor experiențe aleatoare mai simple.

De pildă, pentru orice $n, m \in \mathbf{N}^*$, vom nota în continuare cu

$\mathcal{E}_M$ experiența aleatoare ce constă în aruncarea unei monezi;

$\mathcal{E}_{n*M}$ experiența aleatoare ce constă în a arunca o monedă de n ori;

$\tilde{\mathcal{E}}_{n*M}$ (sau $\mathcal{E}_{M^n}$) experiența aleatoare ce constă în aruncarea a n monezi;

$\mathcal{E}_{n*M^m}$ experiența aleatoare ce constă în a arunca de n ori m monezi;

$\mathcal{E}_Z$ experiența aleatoare ce constă în aruncarea unui zar;

$\mathcal{E}_{n*Z}$ experiența aleatoare ce constă în a arunca un zar de n ori;

$\tilde{\mathcal{E}}_{n*Z}$ (sau $\mathcal{E}_{Z^n}$) experiența aleatoare ce constă în aruncarea a n zaruri;

$\mathcal{E}_{n*Z^m}$ experiența aleatoare ce constă în a arunca de n ori m zaruri;

$\mathcal{E}_{n*\mathcal{G}}$ experiența aleatoare ce constă în efectuarea succesivă de n ori a experienței aleatoare $\mathcal{G}$;

$\tilde{\mathcal{E}}_{n*\mathcal{G}}$ (sau $\mathcal{E}_{\mathcal{G}^n}$) experiența aleatoare ce constă din n efectuări simultane ale experienței $\mathcal{G}$.

$\mathcal{E}_{n*\mathcal{G}^m}$ experiența aleatoare ce constă în repetarea de n ori a unei serii de m efectuări simultane ale experienței $\mathcal{G}$ (desigur, $\mathcal{E}_{1*\mathcal{G}^m} \equiv \mathcal{E}_{\mathcal{G}^m}$).

Desigur, considerăm că orice experiență aleatoare se efectuează de fiecare dată în aceleași condiții.

Esențial de reținut în ce privește caracterizarea oricărei experiențe aleatoare $\mathcal{E}$ este faptul că:

- nu putem preciza înainte de efectuarea experienței $\mathcal{E}$ ce rezultat se va obține, dar cunoaștem mulțimea Ω a tuturor rezultatelor sale posibile;
- la orice efectuare a experienței $\mathcal{E}$ se va obține ca rezultat unul și numai unul dintre elementele mulțimii Ω ;
- după efectuarea experienței $\mathcal{E}$ putem spune cu precizie care rezultat posibil din Ω s-a realizat;

- experiența aleatoare $\mathcal{E}$ se poate repeta, în condiții identice, ori de câte ori dorim.

Mulțimea Ω de rezultate posibile ale lui $\mathcal{E}$ mai poartă numele de **spațiu de selecție** sau **mulțimea de bază** asociată experienței aleatoare $\mathcal{E}$. Când se lucrează cu mai multe experiențe aleatoare, pentru a preciza clar despre care spațiu de selecție este vorba, se vor folosi notații de forma $\Omega_{\mathcal{E}}$. De exemplu, pentru câteva dintre experiențele aleatoare mai sus amintite, dăm mai jos o variantă de descriere a spațiilor de selecție corespunzătoare:

- pentru $\mathcal{E}_M$:

$$\Omega_M = \{b, s\}, \text{ unde } b=\text{banul}, s=\text{stema};$$

- pentru $\mathcal{E}_{2*M}$:

$$\Omega_{2*M} = \Omega_M \times \Omega_M = \{(b, b), (b, s), (s, b), (s, s)\};$$

- pentru $\mathcal{E}_{n*M}$:

$$\Omega_{n*M} = \underbrace{\Omega_M \times \cdots \times \Omega_M}_{\text{de } n \text{ ori}}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*;$$

- pentru $\mathcal{E}_{n*M^m}$:

$$\Omega_{n*M^m} = \underbrace{\Omega_{m*M} \times \cdots \times \Omega_{m*M}}_{\text{de } n \text{ ori}}, \quad \forall n, m \in \mathbf{N}^*;$$

- pentru $\mathcal{E}_Z$

$$\Omega_Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

i.e. punctele corespunzătoare celor 6 fețe ale zarului;

- pentru $\mathcal{E}_{2*Z}$:

$$\Omega_{2*Z} = \Omega_Z \times \Omega_Z = \{(i, j) | i, j = 1..6\};$$

- pentru $\mathcal{E}_{n*Z}$:

$$\Omega_{n*Z} = \underbrace{\Omega_Z \times \cdots \times \Omega_Z}_{\text{de } n \text{ ori}}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*;$$

- pentru $\mathcal{E}_{n*Z^m}$:

$$\Omega_{n*Z^m} = \underbrace{\Omega_{m*Z} \times \cdots \Omega_{m*Z}}_{\text{de } n \text{ ori}}, \quad \forall n, m \in \mathbf{N}^*;$$

- pentru $\mathcal{E}_{n*\mathcal{G}}$:

$$\Omega_{n*\mathcal{G}} = \underbrace{\Omega_{\mathcal{G}} \times \cdots \Omega_{\mathcal{G}}}_{\text{de } n \text{ ori}}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*;$$

unde $\Omega_{\mathcal{G}}$ este spațiul de selecție al experienței $\mathcal{G}$.

- pentru $\mathcal{E}_{n*\mathcal{G}^m}$:

$$\Omega_{n*\mathcal{G}^m} = \underbrace{\Omega_{m*\mathcal{G}} \times \cdots \Omega_{m*\mathcal{G}}}_{\text{de } n \text{ ori}}, \quad \forall n, m \in \mathbf{N}^*.$$

În mod evident experiența aleatoare $\mathcal{E}_{n*Z}$ ce constă în aruncarea unui zar de n ori este echivalentă cu experiența $\mathcal{E}_{n*Z}$ ce constă în aruncarea a n zaruri deodată. Prin urmare, pentru ambele experiențe putem folosi aceeași descriere a spațiului de selecție, adică

$$\Omega_{n*Z} = \tilde{\Omega}_{n*Z} = \Omega_Z^n, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

unde, pentru orice mulțime Θ , prin Θ^n se înțelege produsul cartezian al mulțimii Θ cu ea însăși de n ori.

Același lucru se întâmplă și dacă, într-un context similar, înlocuim experiența de aruncare a zarului cu o experiență aleatoare oarecare $\mathcal{G}$. De exemplu, pentru orice $n, m \in \mathbf{N}^*$, următoarele experiențe aleatoare sunt și ele, în acest sens, echivalente: $\mathcal{E}_{n*\mathcal{G}^m}$, $\mathcal{E}_{m*\mathcal{G}^n}$ și $\mathcal{E}_{n \cdot m*\mathcal{G}}$.

Se observă că spațiile de selecție prezentate mai sus sunt descrise, în general, ca produse carteziene ale unei mulțimi cu ea însăși de un anumit număr de ori. Având în vedere că astfel de produse carteziene pot fi ușor specificate într-o manieră echivalentă ca mulțimi de funcții, rezultă că același lucru se poate face și pentru aceste spații de selecție. De pildă, în cazul experienței aleatoare $\mathcal{E}_{n*\mathcal{G}^m}$ spațiul de selecție mai poate fi specificat astfel

$$\Omega_{n*\mathcal{G}} = \{f | f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \Omega_{\mathcal{G}}\},$$

unde $\Omega_{\mathcal{G}}$ este spațiul de selecție al experienței $\mathcal{G}$.

Deci, pentru aceeași experiență aleatoare, din punctul de vedere al formalismului matematic, se pot da în general mai multe variante echivalente de descriere a mulțimii rezultatelor sale posibile. În funcție de cerințele fiecărei probleme concrete, se va alege una sau alta dintre aceste variante.

Se știe că despre o mulțime oarecare Ω_1 se spune că este *numărabilă* dacă Ω_1 are o mulțime finită de elemente sau dacă există o bijecție $f : \mathbf{N} \rightarrow \Omega_1$.

În cele ce urmează, notația $|\Omega_1|$ va desemna cardinalul mulțimii Ω_1 (i.e. numărul elementelor acestei mulțimi).

Dacă spațiul de selecție Ω , asociat experienței aleatoare $\mathcal{E}$, este o mulțime numărabilă, atunci vom spune că Ω este un **spațiu de selecție discret**.

Fiind dată o experiență aleatoare $\mathcal{E}$, vom numi **evenimente aleatoare** asociate lui $\mathcal{E}$, acele afirmații sau proprietăți referitoare la această experiență aleatoare, care abia după fiecare producere a lui $\mathcal{E}$ putem spune cu certitudine dacă s-au realizat sau nu.

În general, evenimentele aleatoare le vom nota cu litere mari: $A, B, C, D, \dots, A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$

Dacă în urma efectuării experienței aleatoare $\mathcal{E}$ s-a obținut rezultatul $\omega \in \Omega$ și evenimentul aleator A s-a realizat, atunci vom spune că ω este un **rezultat favorabil** evenimentului A . În caz contrar vom spune că ω este un **rezultat nefavorabil** lui A .

Mulțimea rezultatelor favorabile unui eveniment aleator A poartă numele de **reprezentarea** lui A și o vom nota cu A_Ω .

Datorită faptului că orice experiență aleatoare $\mathcal{E}$ este echivalentă cu alegerea la întâmplare a unui element din spațiul de selecție Ω , orice eveniment aleator A se poate identifica cu A_Ω , adică cu o submulțime a lui Ω . Bazându-ne pe această identificare, de foarte multe ori în cele ce urmează vom folosi același simbol pentru a desemna atât un eveniment aleator cât și reprezentarea sa.

Vom numi **eveniment elementar** orice eveniment A pentru care $|A_\Omega| = 1$.

Prin urmare evenimentele elementare se caracterizează printr-un singur rezultat favorabil. Datorită acestui fapt, se poate spune că elementele unui spațiu de selecție (numite uneori și **probe**) sunt evenimente elementare.

Acele evenimente aleatoare A pentru care $|A_\Omega| > 1$, se vor numi **evenimente compuse**.

Exemplul 1.1.1 Să considerăm experiența aleatoare $\tilde{\mathcal{E}}_{2*Z}$ ce constă în aruncarea a două zaruri. Ne propunem să analizăm toate situațiile în care, în urma arucării celor două zaruri, suma punctelor obținute este 7. Folosind noțiunile

mai sus introduse, problema noastră se reduce la găsirea reprezentării evenimentului aleator

A : suma punctelor obținute în urma aruncării celor două zaruri este 7.

Spațiul de selecție $\tilde{\Omega}_{2 \times Z}$ asociat acestei experiențe aleatoare, l-am descris mai sus. În acest context, pentru evenimentul aleator A avem reprezentarea:

$$A_{\tilde{\Omega}_{2 \times Z}} = \{(1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1)\}.$$

Prin urmare, dacă în urma aruncării celor două zaruri la primul zar am obținut i puncte, iar la al doilea zar j puncte, atunci vom spune că evenimentul A s-a realizat dacă $(i, j) \in A_{\tilde{\Omega}_{2 \times Z}}$. În caz contrar, se spune că evenimentul A nu s-a realizat.

De dragul simplității, în cele ce urmează vom scrie direct

$$A = \{(1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1)\},$$

deoarece așa cum am văzut mai sus orice eveniment poate fi identificat cu reprezentarea sa.

1.2 Relații și operații elementare pe mulțimea evenimentelor aleatoare

Fie $\mathcal{E}$ o experiență aleatoare cu spațiul de selecție Ω și fie $\mathcal{T}$ mulțimea evenimentelor aleatoare asociate experienței $\mathcal{E}$.

Pe mulțimea $\mathcal{T}$ se pot defini relații și operații similare cu cele întâlnite în teoria mulțimilor:

- **egalitatea** a două evenimente A și B : dacă cele două evenimente sunt întodeauna simultan realizate sau simultan nerealizate. Se notează $A = B$.
- **contrarul** lui A : este evenimentul care se realizează dacă și numai dacă A nu se realizează. Se notează $\overline{A}$, A^c sau $\mathcal{C}A$.
- **reuniunea** a două evenimente A și B : este evenimentul care se realizează dacă și numai se realizează cel puțin unul din cele două evenimente. Se notează $A \cup B$. Analog se poate defini reuniunea unui număr finit sau infinit de evenimente aleatoare: $\bigcup_{i=1}^n A_i$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

1.2. RELAȚII ȘI OPERAȚII ELEMENTARE PE MULȚIMEA EVENIMENTELOR ALEATOARE

- **intersecția** a două evenimente A și B : este evenimentul care se realizează dacă și numai dacă ambele evenimente se realizează. Se notează $A \cap B$. Analog se poate defini intersecția unui număr finit sau infinit de evenimente aleatoare: $\bigcap_{i=1}^n A_i, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.
- **diferența** a două evenimente A și B : este evenimentul care se realizează dacă și numai se realizează A și B nu se realizează. Se notează $A \setminus B$. Evident, $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
- **implicația** : se spune că evenimentul A implică evenimentul B dacă atunci când se realizează A se realizează în mod necesar și B . Se notează $A \subset B$.

În mulțimea evenimentelor asociate unei experiențe aleatoare există două evenimente cu o semnificație deosebită:

- **evenimentul sigur**: este evenimentul care se realizează întodeauna. probei. Se notează, în general, cu S .
- **evenimentul imposibil**: este evenimentul care nu se realizează nicio dată. Se notează, în general, cu I .

Dacă intersecția a două evenimente este evenimentul imposibil, se spune că cele două evenimente sunt **incompatibile**. În caz contrar, ele se numesc **compatibile**.

O sintetizare a noțiunilor introduse mai sus este dată în tabelul următor:

se scrie	se citește	semnificație în teoria mulțimilor
S	evenimentul sigur	Ω , spațiul de selecție
I	evenimentul imposibil.	$\emptyset$, mulțimea vidă
$A \subset B$	A implică B	$A_\Omega \subset B_\Omega$
$A \sim B$ sau $A = B$	A și B sunt echivalente	$A_\Omega = B_\Omega$
$A \cup B$	A sau B (A reunit cu B)	$A_\Omega \cup B_\Omega$
$A \cap B$	A și B (A intersectat cu B)	$A_\Omega \cap B_\Omega$
CA sau $\overline{A}$	Evenimentul contrar sau complementar lui A .	CA_Ω
$A \cap B = I$	A și B sunt incompatibile	$A_\Omega \cap B_\Omega = \emptyset$

Se poate arăta ușor că $(\mathcal{T}, \cup, \cap, \mathcal{C})$ formează o *algebră Boole*, adică următoarele proprietăți sunt adevărate:

- B₁. $\cup$ și $\cap$ sunt comutative și asociative;
- B₂. $\cup$ și $\cap$ sunt distributive una față de cealaltă;
- B₃. $A \cap (B \cup A) = A$, $(A \cap B) \cup B = B$ (absorbție);
- B₄. $(A \cap CA) \cup B = B$, $(A \cup CA) \cap B = B$ (complementaritate).

Foarte utile în probleme sunt *relațiile lui De Morgan*:

$$\overline{\bigcup_{i \in J} H_i} = \bigcap_{i \in J} \overline{H_i} \quad (1.1)$$

$$\overline{\bigcap_{i \in J} H_i} = \bigcup_{i \in J} \overline{H_i} \quad (1.2)$$

pentru orice sistem de evenimente aleatoare $\{H_i\}_{i \in J}$. Pentru $J = \{1, 2\}$ relațiile anterioare pot fi rescrise astfel:

$$\overline{H_1 \cup H_2} = \overline{H_1} \cap \overline{H_2},$$

1.2. RELAȚII ȘI OPERAȚII ELEMENTARE PE MULȚIMEA EVENIMENTELOR ALEATOARE

$$\overline{H_1 \cap H_2} = \overline{H_1} \cup \overline{H_2}.$$

La fel cum am definit reprezentarea unui eveniment aleator, se poate defini *reprezentarea unei submulțimi* $\mathcal{M}$ a lui $\mathcal{T}$ prin

$$\mathcal{M}_\Omega = \{A_\Omega | A \in \mathcal{M}\}.$$

Dacă $\mathcal{M}_\Omega$ este o algebră (respectiv, σ -algebră) de părți ale lui Ω , vom spune că $\mathcal{M}$ este o algebră (respectiv, σ -algebră) de evenimente aleatoare.

Reamintim că o familie $\mathcal{A}$ de părți ale lui Ω se numește algebră de părți dacă

$$1^0. \Omega \in \mathcal{A};$$

$$2^0. A \in \mathcal{A} \Rightarrow CA \in \mathcal{A};$$

$$3^0. A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}.$$

De asemenea, vom spune despre o familie $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ că este o σ -algebră de părți ale lui Ω dacă

$$1). \Omega \in \mathcal{K};$$

$$2). A \in \mathcal{K} \Rightarrow CA \in \mathcal{K};$$

$$3). A_n \in \mathcal{K}, n = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}.$$

Mulțimea $\mathcal{T}$ a tuturor evenimentelor ce se pot atașa experienței aleatoare $\mathcal{E}$ este în foarte multe cazuri destul de complexă și greu de analizat. În astfel de cazuri, în funcție de problema concretă ce o avem de rezolvat, se analizează mai degrabă anumite algebre sau σ -algebre de evenimente. În cele ce urmează, atunci când $\mathcal{K}$ este o σ -algebră de evenimente, vom numi perechea $(\Omega, \mathcal{K})$ **câmp de evenimente** asociat experienței aleatoare $\mathcal{E}$.

Evident, $\mathcal{T}_\Omega = \mathcal{P}_\Omega$, adică mulțimea tuturor submulțimilor lui Ω .

Foarte utile în calculul unor probabilități sunt sistemele complete de evenimente de care ne vom ocupa în secțiunea referitoare la probabilitățile condiționate. Aceste sisteme complete de evenimente au la bază noțiunea de partiție a unui eveniment aleator pe care o vom introduce în continuare.

Definiția 1.2.1 Fie A un eveniment aleator, $A \neq I$. Vom spune că un sistem de evenimente aleatoare $\{H_i\}_{i \in J}$ formează o **partiție** (sau o **desfacere**) a evenimentului A , dacă

$$1. H_i \neq I, \forall i \in J \text{ și } H_i \cap H_j = I \forall i \neq j;$$

$$2. A = \bigcup_{i \in J} H_i$$

De cele mai multe ori se lucrează cu partiții finite ale evenimentului sigur. Din faptul că pentru orice eveniment aleator X avem

$$X \cap \overline{X} = I, \quad (1.3)$$

$$X \cup \overline{X} = S, \quad (1.4)$$

rezultă că un exemplu simplu de partiție a evenimentului sigur este $\{A, \overline{A}\}$, cu A evenimentul aleator nebanal, adică $A \notin \{I, S\}$.

Exemplul 1.2.1 Să considerăm următoarea ecuație în mulțimea evenimentelor aleatoare:

$$\overline{X \cup A \cup X \cup \overline{A}} = X \cap B \cup \overline{X \cup \overline{B}}, \quad (1.5)$$

unde A și B sunt evenimente date iar X este evenimentul aleator necunoscut.

Rezolvarea unei astfel de ecuații se face ușor utilizând relațiile lui De Morgan, precum și faptul că $\cup$ și $\cap$ sunt distributive una față de cealaltă. Ținând cont și de relația (1.4), membrul drept devine

$$\begin{aligned} X \cap B \cup \overline{X \cup \overline{B}} &= X \cap B \cup \overline{X} \cap B \\ &= (X \cup \overline{X}) \cap B = S \cap B = B \end{aligned}$$

și prin urmare ecuația inițială este echivalentă cu următoarea ecuație:

$$\overline{X \cup A \cup X \cup \overline{A}} = B.$$

Putem și aici transforma membrul stâng utilizând mai întâi relațiile lui De Morgan, așa cum am făcut mai sus, sau putem trece direct la complementară, rezultând astfel

$$X \cup A \cap X \cup \overline{A} = \overline{B}.$$

Membrul stâng poate fi acum evaluat astfel:

$$\begin{aligned} X \cup A \cap X \cup \overline{A} &= X \cap (A \cup \overline{A}) \\ &= X \cap S = X \end{aligned}$$

și prin urmare unica soluție a ecuației (1.5) este $X = \overline{B}$.

1.3 Frecvențe relative și definiția statistică a probabilității

Să considerăm o experiență aleatoare $\mathcal{E}$ și un eveniment aleator A asociat acesteia.

O primă metodă de a aprecia cantitativ șansa de realizare a evenimentului A în urma unei efectuări a experienței $\mathcal{E}$, se bazează pe noțiunea de frecvență relativă pe care o vom introduce în continuare.

Fie n un număr natural nenul. Repetăm experiența $\mathcal{E}$ de n ori în condiții identice și notăm cu n_A numărul de realizări ale evenimentului A (numărul natural n_A mai poartă numele de **frecvență absolută** de apariție a evenimentului A).

Vom numi **frecvență relativă** a evenimentului A pe parcursul unei serii de n efectuări ale lui $\mathcal{E}$) raportul

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

Desigur, frecvența variază de la o serie de efectuări ale experienței $\mathcal{E}$ la altă serie de efectuări, deci are și ea un caracter aleator. Evident $0 \leq n_A \leq n$ și prin urmare

$$0 \leq f_n(A) \leq 1$$

În practică se constată că pentru valori ale lui n foarte mari, frecvența relativă oscilează foarte puțin în jurul unei constante reale $P(A)$, numită **probabilitatea empirică** sau **statistică** a lui A . Aceasta este definiția empirică a probabilității unui eveniment, ea bazându-se pe *proprietatea de stabilitate a frecvențelor relative* descrisă mai sus.

Desigur, ar trebui precizat riguros matematic ce se înțelege aici prin ”oscilează foarte puțin” în jurul valorii $P(A)$, pentru ca definiția de mai sus să fie consistentă. Acest lucru poate fi făcut însă doar pe baza așa numitelor *legi ale numerelor mari* a căror prezentare o vom putea face doar spre sfârșitul acestui curs din cauza complexității noțiunilor ce stau la baza lor.

Alte proprietăți ale frecvențelor relative:

- evenimentul sigur are frecvența 1: $f_n(\Omega) = 1, \forall n \in \mathbf{N}^*$;
- dacă A și B sunt evenimente incompatibile ($A \cap B = \emptyset$) atunci frecvența relativă a reuniunii celor două evenimente este suma frecvențelor relative:

$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B), \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

1.3.1 Definiția clasică a probabilității

Să examinăm pentru început una dintre cele mai simple experiențe aleatoare și anume $\mathcal{E}_Z$, adică aruncarea unui zar presupus a fi perfect. Această experiență

aleatoare are, după cum am văzut, 6 rezultate posibile:

$$\Omega_Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Zarul fiind presupus "corect", este natural a atribui fiecăruia din cele 6 rezultate posibile aceeași șansă de apariție, și anume $\frac{1}{6}$.

Modelul experienței $\mathcal{E}_Z$ poate fi generalizat la cazul unei experiențe aleatoare oarecare $\mathcal{E}$, care admite un spațiu de selecție Ω cu un număr finit de elemente:

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}, \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

Să presupunem că toate cele n rezultate posibile ale experienței $\mathcal{E}$ au aceeași șansă de realizare în orice efectuare a lui $\mathcal{E}$. Vom spune în acest caz că rezultatele experienței aleatoare $\mathcal{E}$ sunt **echiprobabile** (sau **egal probabile**) și le vom numi **cazuri**.

Prin urmare, la fel ca și în cazul experienței $\mathcal{E}_Z$, se poate afirma că, într-o astfel de situație, șansa de realizare a fiecăruia din cele n evenimente elementare asociate experienței $\mathcal{E}$ este $\frac{1}{n}$. Cu alte cuvinte, notând aceste evenimente elementare cu $E_i = \{w_i\}$, $i = 1, \dots, n$, definim probabilitatea evenimentului elementar E_i prin formula:

$$P(E_i) = \frac{1}{n} = \frac{1}{|\Omega|}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Această formulă se extinde în mod natural la cazul unui eveniment aleator oarecare A în felul următor:

$$P(A) = \frac{|A_\Omega|}{|\Omega|} = \frac{n_A}{n},$$

unde n_A reprezintă numărul rezultatelor favorabile lui A (numite aici și **cazuri favorabile**).

Cele discutate mai sus sunt sintetizate în

Definiția 1.3.1 *Dacă $\mathcal{E}$ este o experiență aleatoare cu un număr finit de rezultate posibile, și dacă aceste rezultate sunt echiprobabile, atunci probabilitatea oricărui eveniment aleator A asociat lui $\mathcal{E}$ se definește prin raportul dintre numărul cazurilor favorabile lui A și numărul cazurilor posibile.*

Această definiție este cunoscută sub numele de **definiția clasică a probabilităților**.

Dăm în continuare câteva proprietăți elementare ale probabilităților calculate cu definiția clasică de mai sus:

1. $P(S) = 1$;
2. $P(I) = 0$;

1.3. FRECVENȚE RELATIVE ȘI DEFINIȚIA STATISTICĂ A PROBABILITĂȚII 23

3. $P(A) \in [0, 1]$, oricare ar fi A un eveniment aleator asociat lui $\mathcal{E}$;
4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ pentru orice eveniment A ;
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, oricare ar fi A, B evenimente incompatibile;
6. Dacă A implică B (i.e. $A \subseteq B$), atunci $P(A) \leq P(B)$;
7. Dacă A implică B , atunci $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

Exemplul 1.3.1 Să considerăm experiența aleatoare $\tilde{\mathcal{E}}_{2*Z}$ (adică aruncarea a două zaruri) și ne propunem să calculăm probabilitățile:

- a) probabilitatea de a obține o dublă de 6;
- b) probabilitatea de a obține o dublă;
- c) probabilitatea ca suma punctelor obținute să fie 7.

După cum am văzut în exemplele de mai sus, spațiul de selecție corespunzător acestei experiențe este $\tilde{\Omega}_{2*Z}$ și $|\tilde{\Omega}_{2*Z}| = 36$. Prin urmare, avem 36 de rezultate posibile și cum zarurile sunt presupuse ideale, putem considera că elementele lui $\tilde{\Omega}_{2*Z}$ sunt echiprobabile.

Prin urmare putem aplica definiția clasică pentru calculul probabilităților cerute.

Considerăm evenimentele aleatoare:

A_1 : evenimentul de a obține o dublă de 6;

A_2 : evenimentul de a obține o dublă;

A_3 : evenimentul ca suma punctelor obținute să fie 7.

Reprezentările acestor evenimente sunt:

$$A_1 = \{(6, 6)\};$$

$$A_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\};$$

$$A_3 = \{(1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1)\}.$$

Prin urmare probabilitățile căutate sunt

$$P(A_1) = \frac{1}{36};$$

$$P(A_2) = P(A_3) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Exemplul următor prezintă o problemă celebră de probabilități, apărută în secolul al XVII-lea în Franța pe baza observațiilor concrete asupra jocurilor cu zaruri ce se practicau în vremea aceea. Un prim răspuns la această problemă a fost dat de către matematicianul și filozoful francez *Blaise Pascal*.

Exemplul 1.3.2 (Paradoxul Cavalerului de Méré). Cavalerul de Méré, mare amator al jocurilor cu zaruri, i-a semnalat lui Pascal că are impresia unei "falsități în numere" deoarece el a constatat practic că este mai avantajos să mizezi pe "obținerea cel puțin a unui 6 din 4 aruncări ale unui zar" decât pe "obținerea cel puțin a unei duble 6 din 24 aruncări a două zaruri", deși $\frac{4}{6} = \frac{24}{36}$. Nedumerirea pare justificată și de faptul că numărul mediu al lui "șase" din 4 aruncări este $\frac{4}{6}$, iar numărul mediu al "dublei șase" din 24 aruncări este $\frac{24}{36}$. Există oare "falsități în numere"? Să încercăm să regăsim răspunsul lui Pascal la această întrebare.

Considerăm evenimentele aleatoare:

X_1 : evenimentul de a obține cel puțin o dată 6 din 4 aruncări ale unui zar;

X_2 : evenimentul de a obține cel puțin o dublă de 6 din 24 aruncări a două zaruri.

Vom încerca în continuare să evaluăm probabilitățile acestor evenimente utilizând definiția clasică a probabilității. Devine astfel posibilă compararea celor două probabilități și deci soluționarea problemei.

Evaluarea directă a celor două probabilități este destul de dificilă și de aceea, ca în multe alte situații de genul acesta, se încearcă mai întâi determinarea probabilităților evenimentelor complementare corespunzătoare, $P(\bar{X}_1)$ și $P(\bar{X}_2)$, după care probabilitățile care ne interesează se determină ușor din formulele

$$P(X_1) = 1 - P(\bar{X}_1),$$

$$P(X_2) = 1 - P(\bar{X}_2).$$

În cazul de față, evenimentele complementare sunt:

$\bar{X}_1$: evenimentul de a obține fața cu 6 puncte în cele 4 aruncări ale unui zar;

$\bar{X}_2$: evenimentul de a obține nici o dublă de 6 în 24 aruncări a două zaruri.

După cum am văzut în exemplele de mai sus, spațiul de selecție corespunzător experienței $\mathcal{E}_{4 \times Z}$ este $\Omega_{4 \times Z}$ și $|\Omega_{4 \times Z}| = 6^4$.

Zarurile fiind presupuse ideale, putem considera ca elementele lui $\Omega_{4 \times Z}$ sunt echiprobabile.

În aceste condiții, reprezentarea lui $\bar{X}_1$ se poate descrie astfel:

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \{(i, j, k, l) | i, j, k, l = 1, \dots, 5\} \\ &= \underbrace{\{1, \dots, 5\} \times \dots \times \{1, \dots, 5\}}_{\text{de 4 ori}} \end{aligned}$$

1.3. FRECVENȚE RELATIVE ȘI DEFINIȚIA STATISTICĂ A PROBABILITĂȚII 25

și prin urmare $\overline{X_1}$ are $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$ cazuri favorabile. rezultă că

$$P(\overline{X_1}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

și deci

$$P(X_1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \approx 0,517746.$$

În cazul experienței aleatoare de aruncare a două zaruri de 24 de ori se procedează în mod asemănător. Spațiul de selecție corespunzător acestei experiențe se poate descrie astfel:

$$\Omega_{24 \times Z^2} = \underbrace{\Omega_{Z^2} \times \cdots \times \Omega_{Z^2}}_{\text{de 24 de ori}},$$

unde după cum se știe

$$\Omega_{Z^2} = \{(i, j) | i, j = 1, \dots, 6\}.$$

Dar cardinalul unui produs cartezian este egal cu produsul cardinalelor în cazul unor mulțimi finite și deci numărul cazurilor posibile este aici 36^{24} .

Reprezentarea lui $\overline{X_2}$ este în acest context următoarea

$$\overline{X_2} = \underbrace{M \times, \dots, \times M}_{\text{de 24 ori}}$$

unde

$$M := \Omega_{Z^2} \setminus \{(6, 6)\}$$

și deci, pe baza aceluiași principii de calcul, rezultă că numărul cazurilor favorabile lui $\overline{X_2}$ este 35^{24} .

Prin urmare

$$P(\overline{X_2}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

și deci

$$P(X_2) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,4914038...$$

Prin urmare $P(X_2) < 0,5 < P(X_1)$, ceea ce confirmă constatarea practică a cavalerului.

1.3.2 Definiția axiomatică.

Fie $\mathcal{E}$ o experiență aleatoare, Ω spațiul său de selecție, iar $\mathcal{A}$ o algebră de evenimente aleatoare asociate lui $\mathcal{E}$ (i.e. $\mathcal{A}_\Omega$ este o algebră de părți ale lui Ω).

Definiția 1.3.2 O funcție P definită pe mulțimea de evenimente $\mathcal{A}$ și cu valori reale se numește **probabilitate finit aditivă** dacă verifică proprietățile:

1. probabilitatea oricărui eveniment este nenegativă:

$$\forall A \in \mathcal{A} \text{ avem } P(A) \geq 0$$

2. evenimentul sigur are probabilitatea 1: $P(S) = 1$;

3. dacă A și B sunt două evenimente incompatibile (i.e. $A \cap B = \emptyset$), atunci probabilitatea reuniunii celor două evenimente este suma probabilităților evenimentelor:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Punem în continuare în evidență principalele proprietăți ale unei probabilități finit aditive.

Propoziția 1.3.1 Dacă P este o probabilitate finit aditivă, atunci

1. $P(\emptyset) = 0$ și $P(A) \in [0, 1]$, $(\forall) A \in \mathcal{A}$;
2. $P(\mathcal{C}A) = 1 - P(A)$, $(\forall) A \in \mathcal{A}$;
3. $A, B \in \mathcal{A}$ și $A \subseteq B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$;
4. $A, B \in \mathcal{A}$ și $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$;
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, $(\forall) A, B \in \mathcal{A}$;
6. $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ și $A_i \cap A_j = \emptyset$, $(\forall) i \neq j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.
7. $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$.
8. (**Inegalitatea lui Boole**) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow P(\bigcap_{i=1}^n A_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^n P(\mathcal{C}A_i)$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$.

1.3. FRECVENȚE RELATIVE ȘI DEFINIȚIA STATISTICĂ A PROBABILITĂȚII 27

Demonstrație. Ne ocupăm doar de proprietățile 5), 6), 7) și 8), celelalte proprietăți rezultând imediat din definiția probabilității.

Se observă că

$$A \cup B = A \cup (B - A) \text{ și } B = (B - A) \cup (B \cap A).$$

Aplicând atunci proprietățile anterioare, avem că

$$\begin{aligned} P(B) + P(A) - P(A \cap B) &= P(A) + P(B - A) \\ &= P(A \cup (B - A)) = P(A \cup B). \end{aligned}$$

Proprietatea 6) se poate demonstra prin inducție completă. Pentru $n = 2$ este chiar proprietatea de finit aditivitate a probabilității. Presupunând-o adevărată pentru k , avem

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j\right) &= P\left(\bigcup_{j=1}^k A_j \cup A_{k+1}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j\right) + P(A_{k+1}) = \sum_{j=1}^k P(A_j) + P(A_{k+1}), \end{aligned}$$

adică ea este adevărată și pentru $k + 1$.

Inegalitatea 7) se poate ușor demonstra utilizând proprietatea 6) pentru următorul sistem de evenimente:

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1, \quad B_2 = A_2 \setminus A_1, \\ B_i &= A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right), \quad 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Evident

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n B_i$$

și $B_1, \dots, B_n$ sunt două câte două incompatibile. Prin urmare

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n P(B_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i), \end{aligned}$$

deoarece $B_i \subseteq A_i$ și deci $P(B_i) \leq P(A_i)$, $\forall i = 1..n$.

Inegalitatea lui Boole rezultă imediat din proprietatea anterioară aplicată la $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}A_i$ și din faptul că

$$\mathcal{C} \bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}A_i,$$

conform relațiilor lui De Morgan. ■

Formula de calcul a probabilității unei reuniuni de două evenimente aleatoare prezentată mai sus se poate generaliza la cazul unei reuniuni de n evenimente aleatoare oarecare ($n \geq 2$) în felul următor:

Teorema 1.3.1 (Formula lui Poincaré) *Dacă $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, atunci*

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned}$$

Demonstrație. Formula se poate ușor justifica prin inducție matematică. Cazul $n = 2$ a fost demonstrat mai sus. Pentru claritatea expunerii, vom prezenta doar pasul de inducție de la $n = 2$ la $n = 3$, ideile fiind exact aceleași și la pasul general de inducție.

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^3 A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^2 A_i \bigcup A_3\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^2 A_i\right) + P(A_3) \\ &- P\left(\left(\bigcup_{i=1}^2 A_i\right) \cap A_3\right) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\ &+ P(A_3) - P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) \\ &- P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - [P(A_1 \cap A_2) + P(A_2 \cap A_3) \\ &+ P(A_1 \cap A_3)] + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$
■

Dăm în continuare o aplicație imediată a Formulei lui Poincaré:

Exemplul 1.3.3 (Problema concordanțelor) Presupunem că la o petrecere vin n perechi soț-soție și că, de comun acord, s-a hotărât ca formarea perechilor la dans să se facă aleator. Vom încerca să determinăm în continuare probabilitatea ca cel puțin un soț să danseze cu soția sa.

Cu alte cuvinte, vrem să calculăm probabilitatea de a avea *cel puțin o concordanță*.

Fiecărei perechi soț-soție îi atribuim un număr de la 1 la n , așa cum se face și la concursurile de dans.

Spațiul de selecție al acestei experiențe aleatoare are evident $n!$ elemente. În plus, toate aceste $n!$ rezultate posibile sunt egal probabile și deci suntem în cadrul de aplicabilitate a definiției clasice a probabilității.

Notăm cu X evenimentul ca cel puțin un soț să danseze cu soția sa și cu A_i evenimentul ca perechea i să se regăsească și după formarea aleatoare a perechilor la dans, pentru orice $i = 1, \dots, n$.

Este clar că

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

Aplicând formula lui Poincaré avem

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \\ &= n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Vom defini în continuare noțiunea de probabilitate σ -aditivă. În acest scop, considerăm $\mathcal{E}$ o experiență aleatoare, Ω spațiul său de selecție, iar $\mathcal{K}$ o σ -algebră de evenimente aleatoare asociate lui $\mathcal{E}$ (i.e. $\mathcal{K}_\Omega$ este o σ -algebră de părți ale lui Ω).

Definiția 1.3.3 Fie $P : \mathcal{K} \rightarrow [0, 1]$ o funcție de mulțime. Spunem că o funcție $P : \mathcal{K} \rightarrow [0, 1]$ este o **probabilitate** (sau **măsură de probabilitate**, sau **probabilitate σ -aditivă**) dacă

1. $P(S) = 1$
2. pentru orice șir $(A_n)_{n \geq 1}$ de evenimente din $\mathcal{K}$, două câte două incompatibile, avem

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n). \quad (1.6)$$

Evident, orice probabilitate P este finit aditivă, și prin urmare toate proprietățile puse în evidență mai sus rămân adevărate și aici. Proprietatea (1.6)

pune în evidență faptul că P trebuie să fie în acest caz *numărabil aditivă*. Legătura dintre noțiunile introduse mai sus o scoate în evidență următoarea

Teorema 1.3.2 *Fie $P : \mathcal{K} \rightarrow [0, 1]$ o funcție finit aditivă, astfel încât $P(S) = 1$. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. P este o măsură de probabilitate.
2. pentru orice șir $(A_n)_{n \geq 1}$ de evenimente din $\mathcal{K}$, cu $A_n \subset A_{n+1} \forall n \geq 1$, avem că

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n);$$

3. pentru orice șir $(A_n)_{n \geq 1}$ de evenimente din $\mathcal{K}$, cu $A_{n+1} \subset A_n \forall n \geq 1$, avem că

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

Pe un câmp de evenimente $(\Omega, \mathcal{K})$ se pot defini mai multe aplicații P care să fie probabilități. Alegerea lui P se face în funcție de problema concretă pe care o avem de rezolvat, însă odată ales vom spune că am *probabilizat mulțimea evenimentelor* K și vom numi $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *câmp de probabilitate*.

1.4 Independența și condiționarea evenimentelor aleatoare

Prezentăm mai jos câteva noțiuni foarte importante în ce privește aplicațiile practice ale teoriei probabilităților.

1.4.1 Independența evenimentelor aleatoare

Fie $\mathcal{E}$ o experiență aleatoare oarecare și A, B două evenimente asociate ei.

Din punct de vedere intuitiv, cele două evenimente A și B sunt independente dacă realizarea sau nerealizarea lui A nu ne dă nici o informație (sau, altfel spus, nu influențează cu nimic) asupra realizării sau nerealizării lui B și reciproc.

Din punct de vedere matematic, avem următoarea definiție a noțiunii de independență:

1.4. INDEPENDENȚA ȘI CONDIȚIONAREA EVENIMENTELOR ALEATOARE 31

Definiția 1.4.1 Vom spune că două evenimente A și B sunt **independente** dacă

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Exemplul 1.4.1 Să considerăm experiența $\mathcal{E}_{2m}$, adică aruncarea a două monezi, și să definim evenimentele:

A : evenimentul de a obține stema la prima monedă;

B : evenimentul de a obține stema la a doua monedă,

atunci A și B sunt independente.

Și aici, din punct de vedere intuitiv, lucrurile sunt clare, însă putem ușor verifica și condiția cerută de definiția anterioară.

Într-adevăr, spațiul de selecție este aici

$$\Omega_{2m} = \{(b, b), (b, s), (s, b), (s, s)\}$$

și, pe baza definiției clasice a probabilității, avem

$$P(A) = P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

iar

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Prin urmare, relația $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ este aici verificată.

Teorema 1.4.1 Dacă A și B sunt independente, atunci la fel vor fi și cuplurile de evenimente: (A, CB) , (CA, B) și (CA, CB) .

Demonstrație. Vom arăta doar cum rezultă că A și CB sunt independente, celelalte cazuri demonstrându-se analog.

Cum A și B sunt independente, rezultă că

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

și prin urmare

$$\begin{aligned} P(A \cap CB) &= P(A \setminus (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) \cdot P(CB), \end{aligned}$$

adică ceea ce trebuia demonstrat. ■

Pentru cazul a două mulțimi de evenimente, avem:

Definiția 1.4.2 Dacă $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ sunt două mulțimi de evenimente aleatoare asociate lui $\mathcal{E}$, atunci vom spune că $\mathcal{M}_1$ și $\mathcal{M}_2$ sunt **independente** dacă

$$A_1 \in \mathcal{M}_1, A_2 \in \mathcal{M}_2 \Rightarrow A_1 \text{ și } A_2 \text{ sunt independente}$$

În general $\mathcal{M}_1$ și $\mathcal{M}_2$ sunt algebre (sau σ -algebre) de evenimente.

Am discutat pînă acum doar cazul a două evenimente aleatoare dar, desigur, putem pune aceeași problemă și în cazul unui sistem de n evenimente aleatoare sau chiar al unui sistem de evenimente indexate după o mulțime oarecare J .

Definiția 1.4.3 Evenimentele $(A_i)_{i \in J}$ (unde J este o mulțime oarecare de indici cu $|J| \geq 2$) sunt **independente în totalitate** dacă

$$P\left(\bigcap_{i \in J_1} A_i\right) = \prod_{i \in J_1} P(A_i) \quad (1.7)$$

pentru orice submulțime finită J_1 a lui J .

Analog se poate acum extinde noțiunea de independență la cazul unei familii de mulțimi de evenimente $(\mathcal{M}_i)_{i \in J}$.

Exemplul 1.4.2 Să considerăm experiența $\mathcal{E}_{3z}$, adică aruncarea unui zar de 3 ori. Dacă A_1, A_2 și A_3 sunt trei evenimente aleatoare astfel încât A_i nu depinde decât de ce se întâmplă la aruncarea i ($i = 1, 2, 3$), atunci evenimentele A_1, A_2, A_3 sunt independente în totalitate. În particular, considerând evenimentele

A_1 : evenimentul de a obține fața cu 6 puncte la prima aruncare;

A_2 : evenimentul de a obține fața cu 3 puncte la a doua aruncare;

A_3 : evenimentul de a obține fața cu 6 puncte la a treia aruncare,

atunci aceste trei evenimente sunt independente în totalitate.

Justificarea independenței acestor trei evenimente cu ajutorul definiției impune verificarea următoarelor patru relații

$$P(A_1 \bigcap A_2) = P(A_1)P(A_2),$$

$$P(A_1 \bigcap A_3) = P(A_1)P(A_3),$$

$$P(A_2 \bigcap A_3) = P(A_2)P(A_3),$$

$$P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

Calculul acestor probabilități se face imediat tot pe baza definiției clasice.

Pe lângă noțiunea de independență în totalitate descrisă mai sus, avem și noțiunea de evenimente independente p luate câte p , pe care o vom descrie în continuare.

1.4. INDEPENDENȚA ȘI CONDIȚIONAREA EVENIMENTELOR ALEATOARE 33

Definiția 1.4.4 Evenimentele $(A_i)_{i \in J}$ (unde J este o mulțime oarecare de indici cu $|J| \geq 2$) sunt **independente p luate câte p** ($p \in \mathbf{N}$, $2 \leq p \leq |J|$) dacă

$$P\left(\bigcap_{i \in J_1} A_i\right) = \prod_{i \in J_1} P(A_i) \quad (1.8)$$

pentru orice submulțime finită J_1 a lui J cu $|J_1| \leq p$.

Observația 1.4.1 Aceste două noțiuni puse în evidență mai sus (i.e. independența în totalitate și independența p luate câte p) nu sunt echivalente, așa după cum va rezulta din următorul exemplu dat de *S. Bernstein*.

Exemplul 1.4.3 Considerăm un tetraedru regulat și omogen ale cărui fețe le vom nota cu f_1, f_2, f_3 și f_4 . Primele trei fețe le colorăm respectiv în roșu, galben și albastru, iar fața f_4 o împărțim în trei părți egale pe care, la rândul lor, le colorăm respectiv tot cu aceleași culori, ca mai sus.

Se aruncă tetraedrul pe o suprafață plană și ne interesează fața comună cu acea suprafață.

Spațiul de selecție asociat acestei experiențe aleatoare este:

$$\Omega = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$$

și în mod evident toate elementele lui Ω sunt egal probabile.

Considerăm evenimentele aleatoare:

A_1 : apare o față cu roșu pe ea;

A_2 : apare o față cu galben pe ea;

A_3 : apare o față cu albastru pe ea.

Reprezentările corespunzătoare acestor evenimente sunt:

$$A_1 = \{f_1, f_4\};$$

$$A_2 = \{f_2, f_4\};$$

$$A_3 = \{f_3, f_4\}.$$

Utilizând definiția clasică a probabilității, avem

$$P(A_i) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \forall i = 1, 2, 3,$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4}, \quad \forall i \neq j, i, j = 1, 2, 3,$$

și

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}.$$

Deoarece

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j), \quad \forall i \neq j, i, j = 1, 2, 3,$$

rezultă că A_1, A_2, A_3 sunt independente două câte două, dar ele nu sunt independente în totalitate.

Observația 1.4.2 În concluzie, dacă evenimentele unui sistem $(A_i)_{i \in J}$ sunt independente p câte p și $p_1 \leq p$ atunci ele sunt independente și p_1 câte p_1 . Reciproca nu este adevărată, așa cum am văzut mai sus.

1.4.2 Probabilități condiționate

Situațiile în care două evenimente aleatoare se influențează reciproc în ce privește realizarea lor sunt de foarte mare interes în multe probleme economice. Instrumentul primar de studiu al unor astfel de situații este noțiunea de probabilitate condiționată. Pe baza ei se vor construi mai târziu distribuțiile condiționate, martingalele, procesele Markov, modelele de regresie etc., toate acestea fiind instrumente extrem de utile în modelarea proceselor economice.

Să considerăm acum o experiență aleatoare $\mathcal{E}$ și A, B două evenimente asociate ei. Dacă știm despre evenimentul B că s-a realizat, putem utiliza această informație pentru a calcula șansa de realizare a lui A .

Definiția 1.4.5 Dacă A și B sunt două evenimente oarecare cu $P(B) > 0$, atunci probabilitatea lui A condiționată de B o vom nota cu $P(A|B)$ și o vom defini prin formula:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (1.9)$$

Prin urmare, $P(A|B)$ reprezintă șansa de realizare a lui A în situațiile în care știm că B s-a realizat.

În mod analog se definește și probabilitatea $P(B|A)$, în situațiile în care $P(A) > 0$, și anume

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Putem da acum noi caracterizări pentru independența a două evenimente asociate experienței $\mathcal{E}$:

1.4. INDEPENDENȚA ȘI CONDIȚIONAREA EVENIMENTELOR ALEATOARE 35

Teorema 1.4.2 Fie A și B sunt două evenimente oarecare cu $P(B) > 0$. Atunci A și B sunt independente dacă și numai dacă $P(A|B) = P(A)$.

Demonstrație. Într-adevăr, dacă A și B sunt independente, atunci

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Reciproc, dacă $P(A|B) = P(A)$, atunci

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

și deci $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, adică A și B sunt independente. ■

Teorema 1.4.3 Fie A și B două evenimente oarecare cu $0 < P(B) < 1$. Atunci A și B sunt independente dacă și numai dacă $P(A|B) = P(A|\bar{B})$.

Demonstrație. Trebuie să arătăm că

$$P(A|B) = P(A|\bar{B}) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

” $\Leftarrow$ ”: Din $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ rezultă și $P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$ și de aici obținem

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) \\ &= \frac{P(A)P(\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = P(A|\bar{B}). \end{aligned}$$

” $\Rightarrow$ ”: Din $P(A|B) = P(A|\bar{B})$ rezultă

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})},$$

de unde

$$P(A \cap B) \cdot P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) \cdot P(B),$$

respectiv

$$P(A \cap B) \cdot (1 - P(B)) = P(A \cap \bar{B}) \cdot P(B).$$

De aici se obține:

$$P(A \cap B) = P(A \cap \bar{B}) \cdot P(B) + P(A \cap B) \cdot P(B)$$

$$\begin{aligned}
&= (P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)) \cdot P(B) \\
&= P((A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)) \cdot P(B) \\
&= P(A) \cdot P(B).
\end{aligned}$$

■

Să considerăm acum un câmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ și fie $B \in \mathcal{K}$ astfel încât $P(B) > 0$.

Definiția 1.4.6 Funcția $P_B : \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{R}$, dată prin

$$P_B(A) := P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \forall A \in \mathcal{K},$$

se numește **probabilitate condiționată** (de B).

Se poate verifica ușor că această funcție satisface toate condițiile necesare pentru a fi o probabilitate și prin urmare avem

Propoziția 1.4.1 Tripletul $(\Omega, \mathcal{K}, P_B)$ este un câmp de probabilitate.

Ne vom ocupa în continuare de câteva formule clasice de calcul al probabilităților condiționate, foarte utile în rezolvarea multor probleme.

Teorema 1.4.4 (Formula de înmulțire a probabilităților) Să considerăm n ($n \geq 2$) evenimente aleatoare $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0.$$

Atunci:

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \\
&\quad \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})
\end{aligned}$$

Demonstrație. Rezultă imediat, explicitând membrul drept cu definiția condiționării dată la începutul acestei secțiuni și apoi făcând simplificările de rigoare. Se poate, desigur, demonstra ușor și prin inducție.

■

1.4. INDEPENDENȚA ȘI CONDIȚIONAREA EVENIMENTELOR ALEATOARE 37

Observația 1.4.3 a) Dacă cele n evenimente din propoziția anterioară sunt în totalitate independente, atunci formula de înmulțire a probabilităților se reduce la binecunoscuta formulă

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k) \quad (1.10)$$

Justificarea rezultă imediat pe baza Teoremei 1.4.2.

b) Particularizând $n = 2$ în teorema anterioară, obținem următoarea formulă frecvent utilizată în probleme:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

pentru orice evenimente A, B astfel încât $P(A) > 0, P(B) > 0$.

Pe baza definiției 1.2.1 vom defini acum sistemele complete de evenimente pe care sunt construite formulele de mai jos.

Definiția 1.4.7 Vom spune că un sistem de evenimente aleatoare $\{H_i\}_{i \in J}$ formează un **sistem complet de evenimente** dacă $\{H_i\}_{i \in J}$ este o partiție a evenimentului sigur și dacă $P(H_i) > 0, \forall i \in J$.

Observația 1.4.4 De cele mai multe ori mulțimea de indici J cu care vom lucra va fi de forma

$$J = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Teorema 1.4.5 (Formula probabilității totale) Fie $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un sistem complet de evenimente ($n \geq 2$), iar X este un eveniment oarecare. Atunci

$$P(X) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P_{A_i}(X) \quad (1.11)$$

Demonstrație. Ținând cont că

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$$

și

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j,$$

rezultă că X poate fi descompus astfel:

$$\begin{aligned} X &= X \cap S = X \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \\ &= (X \cap A_1) \cup (X \cap A_2) \cup \dots \cup (X \cap A_n). \end{aligned}$$

Cum însă evenimentele $(X \cap A_1), (X \cap A_2), \dots, (X \cap A_n)$ sunt incompatibile două câte două, rezultă

$$P(X) = \sum_{i=1}^n P(X \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P_{A_i}(X), \quad (1.12)$$

ultima egalitate obținându-se din formula de definiție a probabilităților condiționate. ■

Teorema 1.4.6 (Formula lui Bayes) *Dacă $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ este un sistem complet de evenimente, iar X este un eveniment oarecare cu $P(X) > 0$, atunci*

$$P(A_j|X) = \frac{P(A_j) \cdot P(X|A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(X|A_i)}, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (1.13)$$

Demonstrație. Rezultă imediat, utilizând doar definiția condiționării și formula probabilității totale:

$$P(A_j|X) = \frac{P(X \cap A_j)}{P(X)} = \frac{P(A_j) \cdot P(X|A_j)}{P(X)} \quad (1.14)$$

■

Observația 1.4.5 Formula lui Bayes mai este cunoscută și sub numele de **formula ipotezelor**.

1.5 Metode de numărare

Utilizarea definiției clasice a probabilității impune determinarea numărului de cazuri posibile și a celui de cazuri favorabile unui eveniment. Evaluarea acestor numere nu este întotdeauna ușoară și de aceea în continuare vom pune în evidență câteva metode și rezultate utile acestui scop.

1.5.1 Principiul multiplicării

Presupunând că avem de efectuat r ($r \geq 2$) operații distincte astfel încât operația i să poată fi efectuată în n_i moduri diferite, $i = 1, \dots, r$, atunci toate cele r operații pot fi executate în $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$ variante diferite.

Exemplul 1.5.1 Să considerăm r urne $U_1, U_2, \dots, U_r$ astfel încât urna U_i conține n_i bile de culoarea c_i , $i = 1, \dots, r$.

Atunci, pe baza principiului multiplicării descris mai sus, rezultă ca numărul variantelor distincte de obținere a r bile de culori diferite în urma extragerii câte unei bile din fiecare urnă este $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$.

Exemplul 1.5.2 Să presupunem că formăm cuvântul "renova" din litere tăiate din alfabet. După aceea fișele cu literele acestui cuvânt se amestecă bine și apoi se extrag la întâmplare patru dintre ele și se așează una după alta în ordinea extragerii. Să evaluăm în continuare probabilitatea cu care se va obține cuvântul "nora".

Experiența considerată constă în aceea că extragem la întâmplare pe rând patru fișe dintr-un grup de 6 fișe. Deoarece la prima extragere putem avea 6 rezultate diferite, la a doua 5, ... la a patra 3, rezultă că numărul cazurilor posibile este $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$, conform principiului multiplicării, toate aceste rezultate fiind egal probabile. Doar un singur rezultat este însă favorabil evenimentului a cărui probabilitate ni se cere și deci probabilitatea căutată este $\frac{1}{360} \approx 0,003$.

Exemplul 1.5.3 Să facem o operație asemănătoare cu cea descrisă în exemplul anterior, dar de această dată cu literele care au format la început cuvântul "mamaia". Cu ce probabilitate se va obține în acest fel cuvântul "mama"?

Experimentul constă și aici din extragerea succesivă a patru fișe dintr-un grup de 6 fișe de același fel, deci poate avea 360 de rezultate egal probabile. Calculul numărului de rezultate favorabile este însă mult mai complicat decât în cazul exemplului anterior deoarece în cuvântul "mamaia" există litere identice. Favorabile vor fi aici toate acele rezultate în care va fi extrasă întâi oricare din fișele cu litera "m", a doua - oricare dintre cele trei fișe cu litera "a", a treia - a doua fișă cu litera "m" (reamintim că una dintre aceste fișe a fost extrasă la început), a patra extragere - oricare dintre cele două fișe rămase după a doua extragere a fișelor cu litera "a". Pe baza principiului mai sus enunțat, asociind cele două rezultate posibile ale primei extrageri cu cele trei ale celei de-a doua, cu un rezultat posibil al celei de-a treia și cu cele două rezultate posibile ale celei de-a patra extrageri, vom obține în total $2 \times 3 \times 1 \times 2 = 12$ rezultate favorabile diferite. Deci probabilitatea căutată este egală aici cu:

$$\frac{12}{360} = \frac{1}{30} \approx 0,033.$$

1.5.2 Elemente de analiză combinatorie

Majoritatea noțiunilor și rezultatelor prezentate în această secțiune se regăsesc în manualele de liceu, așa că aici vom face doar o prezentare rezumativă.

Fie X și Y două mulțimi finite, $|X| = n$, $|Y| = m$.

Propoziția 1.5.1 *Numărul funcțiilor definite pe X cu valori în Y este m^n .*

Demonstrația se face ușor prin inducție.

Ca o consecință imediată se poate deduce din propoziția anterioară că numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi finite cu n elemente este 2^n , adică

$$|A| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^n.$$

Demonstrația se bazează pe faptul că orice submulțime B a lui A este perfect determinată de funcția sa caracteristică $1_B : A \rightarrow \{0, 1\}$.

Se poate da însă și o altă variantă de justificare, utilizând interpretarea uzuală a numerelor C_n^k , precum și faptul că

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = (1+1)^n = 2^n.$$

Propoziția 1.5.2 *Dacă $m \geq n$, numărul funcțiilor injective de la X la Y este A_m^n .*

Pentru aranjamente de m luate câte n se mai utilizează și notația $[m]_n$. Reamintim formula de calcul

$$A_m^n = [m]_n = \frac{m!}{(m-n)!} = m(m-1)\dots(m-n+1).$$

Din propoziția anterioară rezultă că numărul funcțiilor bijective $f : X \rightarrow Y$ este $[n]_n = A_n^n = n!$ și se notează cu P_n (adică permutări de n obiecte).

Vom presupune în cele ce urmează că $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$.

Definiția 1.5.1 *Fie $(n_1, \dots, n_m)$ un m -uplu de numere naturale cu proprietatea că $n = n_1 + \dots + n_m$. Orice funcție $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow Y$, cu proprietatea că*

$$|f^{-1}(\{y_i\})| = n_i, \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

*unde, după cum se știe, $f^{-1}(\{y_i\}) = \{x \in X | f(x) = y_i\}$, se numește **permutare cu repetiție de ordin n și tip $(n_1, \dots, n_m)$.***

Propoziția 1.5.3 *Numărul tuturor permutărilor cu repetiție de ordin n și tip $(n_1, \dots, n_m)$ este egal cu:*

$$C_n^{(n_1, \dots, n_m)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}.$$

Aceste numere se mai numesc și *numere multinomiale*, deoarece extind formula clasică a binomului.

Demonstrația acestei propoziții se face ușor cu ajutorul principiului multiplicării:

- $C_n^{n_1}$ moduri diferite de a alege mulțimea $f^{-1}(\{y_1\})$ din elementele lui X ;
- $C_{n-n_1}^{n_2}$ moduri diferite de alegere a mulțimii $f^{-1}(\{y_2\})$ din elementele lui $X \setminus f^{-1}(\{y_1\})$
- $\vdots$
- $C_{n_m}^{n_m} = 1$, adică un singur mod în care mai putem alege elementele lui $f^{-1}(\{y_m\})$ din ultima mulțime rămasă în urma acestui procedeu de repartizare și care are n_m elemente.

Deci în total vom avea:

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \dots C_{n_m}^{n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}$$

permutări cu repetiție de ordin n și tip $(n_1, \dots, n_m)$.

1.6 Scheme Clasice de Probabilitate.

Dăm în continuare un set de formule aplicabile în situații destul de generale și care sunt cunoscute sub numele de scheme clasice de probabilitate.

1.6.1 Schema lui Bernoulli (sau Schema bilei revenite)

Vom începe cu cea mai simplă variantă de prezentare a acestei scheme, urmând ca spre finalul prezentării să discutăm și o altă variantă sub care ea poate fi întâlnită.

Se consideră o urnă conținând N bile dintre care n_1 bile albe și n_2 bile negre (deci $n_1 + n_2 = N$). Presupunem bilele identice ca formă și dimensiuni.

Se fac din această urnă n extrageri succesive, introducându-se de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă (vom spune că s-au făcut n **extrageri cu revenire**). Notăm această experiență aleatoare cu $\mathcal{E}_B(n, n_1, N)$.

În acest context, se pune problema determinării probabilității ca din cele n bile astfel extrase, k bile să fie albe ($k \leq n$). Notăm această probabilitate cu $P_n(k)$ și vom arăta că ea este:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

unde $p = \frac{n_1}{N}$ este probabilitatea de a extrage din urnă o bilă albă.

Vom determina această probabilitate utilizând definiția clasică a probabilității.

Notăm cu U_N mulțimea tuturor bilelor din urnă (deci U_N este o mulțime cu N elemente distincte și în plus, fără a restrânge generalitatea, considerăm că bilele albe sunt numerotate de la 1 la n_1 , iar bilele negre de la $n_1 + 1$ la $n_1 + n_2$) și cu J_n mulțimea primelor n numere naturale nenule, adică

$$J_n = \{1, \dots, n\}$$

(mulțimea J_n se identifică cu mulțimea celor n efectuări independente ale experienței de extragere a unei bile din urnă). Prin urmare

$$U_N = \{b_1, b_2, \dots, b_{n_1}, b_{n_1+1}, \dots, b_{n_1+n_2}\},$$

$$J_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Spațiul de selecție poate fi descris în acest caz prin mulțimea funcțiilor ce se pot defini de la J_n la U_N . Cu alte cuvinte, identificăm fiecare rezultat al acestei experiențe aleatoare cu o funcție $f: J_n \rightarrow U_N$ pe baza următoarei corespondențe: $f(j) = b_p$ dacă și numai dacă în extragerea j s-a obținut bila b_p , $\forall j \in J_n$ și $\forall p = 1, \dots, n_1 + n_2$.

Este clar că toate evenimentele elementare corespunzătoare experienței $\mathcal{E}_B(n, n_1, N)$ sunt echiprobabile. Prin urmare vom putea aplica definiția clasică a probabilității pentru calculul lui $P_n(k)$.

Numărul cazurilor posibile este dat de cardinalul spațiului de selecție și prin urmare este N^n .

Calculul numărului de cazuri favorabile se poate face astfel: sunt C_n^k modalități de alegere a celor k extrageri în care apare bilă albă. Fixând una dintre aceste modalități, avem n_1^k variante de algere a celor k bile albe și n_2^{n-k} variante de alegere a celor $n - k$ bile negre.

Combinând toate aceste modalități și variante conform principiului multiplicării, vom obține că numărul cazurilor favorabile este $C_n^k n_1^k n_2^{n-k}$ și prin urmare probabilitatea căutată este într-adevăr

$$P_n(k) = \frac{C_n^k n_1^k n_2^{n-k}}{N^n} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Dăm în continuare o altă variantă de prezentare a schemei lui Bernoulli.

Fie $\mathcal{E}_0$ o experiență aleatoare și A un eveniment asociat ei.

Fie p probabilitatea de realizare a evenimentului A și $q = 1 - p$.

Notăm cu $\mathcal{E}_B(n, p)(\mathcal{E}_0, A)$ (sau chiar cu $\mathcal{E}_B(n, p)$ dacă nu e pericol de confuzie și se poate deduce din context despre ce experiențe și evenimente e vorba) experiența aleatoare ce constă din repetarea de n ori în mod independent a experienței $\mathcal{E}_0$.

În cadrul experienței $\mathcal{E}_B(n, p)$ se pune problema determinării probabilității ca evenimentul A să se realizeze de k ori ($0 \leq k \leq n$).

Vom nota această probabilitate tot cu $P_n(k)$, deoarece ea are aceeași formulă de calcul ca în varianta anterioară, adică:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Într-un asemenea context general, justificarea acestei formule de calcul se poate face doar pe baza noțiunii de independență a evenimentelor aleatoare și a proprietăților acesteia.

Fie X evenimentul ca în urma efectuării experienței $\mathcal{E}_B(n, p)$ evenimentul A să se realizeze de k ori (i.e. X este aici evenimentul a cărui probabilitate vrem să o evaluăm) și fie $F_n(A)$ mulțimea tuturor funcțiilor

$$f : J_n \rightarrow \{A, \overline{A}\}.$$

Notăm cu $F_{n; k}(A)$ mulțimea funcțiilor $f \in F_n(A)$ care iau "valoarea" A de k ori. adică

$$F_{n; k}(A) := \{f \in F_n(A) \mid |f^{-1}(A)| = k\}.$$

Având în vedere că aceste funcții au codomeniul compus din două elemente, rezultă că $F_{n; k}(A)$ este tocmai mulțimea permutărilor cu repetiție de ordin n și tip $(k, n-k)$. Prin urmare, numărul elementelor lui $F_{n; k}(A)$ este

$$|F_{n; k}(A)| = C_n^k. \quad (1.15)$$

Fiecărei funcții $f \in F_n(A)$ îi asociem în cadrul experienței $\mathcal{E}_B(n, p)$ un eveniment aleator E_f , definit astfel:

E_f : evenimentul ca, în urma efectuării experienței $\mathcal{E}_B(n, p)$, la repetarea cu numărul i a experienței $\mathcal{E}_0$ să se realizeze evenimentul $f(i)$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Este clar că sistemul de evenimente $(E_f)_{f \in F_{n; k}(A)}$ formează o partiție a evenimentului X și prin urmare

$$P(X) = \sum_{f \in F_{n; k}(A)} P(E_f). \quad (1.16)$$

Însă, fiecare eveniment E_f cu $f \in F_{n; k}(A)$ este intersecția a n evenimente independente în totalitate:

$$E_f = \bigcap_{i=1}^n E_{f; i},$$

unde, pentru orice $i = 1, \dots, n$

$E_{f,i}$: evenimentul ca la repetarea cu numărul i a lui $\mathcal{E}_0$ să se realizeze evenimentul $f(i)$.

Din definiția independenței în totalitate obținem imediat că

$$P(E_f) = p^k \cdot q^{n-k}, \quad \forall f \in F_{n; k}(A).$$

Folosind atunci (1.16) și (1.15), rezultă că

$$P(X) = P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Observația 1.6.1 Probabilitatea $P_n(k)$ din schema lui Bernoulli este tocmai coeficientul lui x^k în dezvoltarea binomială:

$$(px + q)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} x^k = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} x^k \quad (1.17)$$

Din acest motiv, schema lui Bernoulli mai poartă și numele de **schema binomială**.

Exemplul 1.6.1 Se aruncă o monedă de 5 ori. Care este probabilitate ca stema să apară de cel mult două ori?

Soluție. Conform schemei lui Bernoulli, probabilitatea ca în urma celor 5 aruncări stema să apară de k ori este

$$P_5(k) = C_5^k \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{5-k}} = C_5^k \frac{1}{2^5},$$

pentru orice $k = 0, 1, \dots, 5$. Prin urmare, probabilitatea ca stema să apară de cel mult două ori este

$$\begin{aligned} & P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) \\ &= (C_5^0 + C_5^1 + C_5^2) \frac{1}{2^5} = \frac{16}{2^5} = 0.5. \end{aligned}$$

1.6.2 Schema multinomială

O direcție în care putem generaliza schema lui Bernoulli constă în a analiza extragerile cu revenire dintr-o urnă care conține bile de r culori diferite, cu $r \geq 2$. Obținem astfel o primă variantă de prezentare a **schemei multinomiale** care mai e cunoscută și sub numele de **schema generalizată a bilei revenite**. Descriem în continuare elementele acestui model și formulele de calcul corespunzătoare lui.

Presupunem că într-o urnă avem

a_1 bile de culoarea c_1 ,

a_2 bile de culoarea c_2 ,

$\vdots$

a_r bile de culoarea c_r .

Se fac n extrageri cu revenire din această urnă ($\mathbf{N}^*$) și se pune problema determinării probabilității ca printre cele n bile extrase să avem:

k_1 bile de culoarea c_1 ,

k_2 bile de culoarea c_2 ,

$\vdots$

k_r bile de culoarea c_r ,

unde, desigur, numerele naturale k_i verifică

$$k_1 + \cdots + k_r = n.$$

Această probabilitate o vom nota cu $P_n(k_1, k_2, \dots, k_r)$ și ea este dată prin următoarea formulă:

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!} p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}, \quad (1.18)$$

unde

$$p_i = \frac{a_i}{a_1 + \cdots + a_r}, \quad \forall i = 1, \dots, r.$$

Evident, pentru orice $i = 1, \dots, r$, p_i reprezintă probabilitatea de a extrage o bilă de culoarea c_i din urna a cărei compoziție a fost descrisă mai sus.

Justificarea formulei (1.18) se poate face exact cu același gen de idei ca și cele prezentate la schema lui Bernoulli.

Dăm în continuare a doua variantă de prezentare a schemei multinomiale.

Fie $\mathcal{E}_0$ o experiență aleatoare și $\mathbf{S}_1 = \{A_1, \dots, A_r\}$ un sistem complet de evenimente asociat ei.

Pentru $i = 1, \dots, r$, notăm p_i probabilitatea de realizare a evenimentului A_i în cadrul experienței $\mathcal{E}_0$.

Cum $\{A_1, \dots, A_r\}$ este un sistem complet de evenimente, rezultă că

$$p_1 + \cdots + p_r = 1.$$

Fie $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_r)$. Notăm cu $\mathcal{E}_B(n, \mathbf{p})(\mathcal{E}_0, \mathbf{S}_1)$ (sau chiar cu $\mathcal{E}_B(n, \mathbf{p})$ dacă nu e pericol de confuzie și se poate deduce din context despre ce experiență și sistem complet de evenimente e vorba) experiența aleatoare ce constă din repetarea de n ori în mod independent a experienței $\mathcal{E}_0$.

În cadrul acestei experiențe $\mathcal{E}_B(n, \mathbf{p})$ se pune problema determinării probabilității ca

evenimentul A_1 să se realizeze de k_1 ori,

evenimentul A_2 să se realizeze de k_2 ori,

⋮

evenimentul A_r să se realizeze de k_r ori,

unde k_i sunt numere naturale ce verifică $k_1 + \dots + k_r = n$.

Probabilitatea căutată este și în acest caz dată de formula (1.18,) iar justificarea ei se face în același fel ca și în cazul celei de-a doua variante de prezentare a schemei Bernoulli.

Observația 1.6.2 Numele de schemă multinomială provine și aici din faptul că probabilitatea pusă în evidență de formula (1.18) coincide cu termenul generic din dezvoltarea multinomului $(p_1 + \dots + p_r)^n$, adică

$$(k_1 + \dots + k_r)^n = \sum \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!} p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}, \quad (1.19)$$

unde sumarea se face după toate r -uplele de numere naturale $(k_1, \dots, k_r)$ cu proprietatea că $k_1 + \dots + k_r = n$.

1.6.3 Schema bilei nerevenite

Această schemă oferă un model de calcul pentru situațiile în care dintr-o urnă se fac n **extrageri fără revenire** (adică bila extrasă nu mai este repusă în urnă).

Să considerăm o urnă care conține a bile albe și b bile negre.

Din această urnă se fac n extrageri fără revenire ($0 \leq n \leq a + b$) și se pune problema determinării probabilității ca dintre cele n bile extrase k să fie albe ($\max(0, n - b) \leq k \leq \min(a, n)$).

Calculul acestei probabilități se poate face pe baza definiției clasice a probabilității. Spațiul de selecție poate fi aici asimilat cu mulțimea submulțimilor de n bile ale mulțimii tuturor bilelor din urnă (pentru că nu interesează ordinea de apariție a culorilor).

Prin urmare, numărul cazurilor posibile va fi C_{a+b}^n

Să notăm cu X evenimentul de a obține k bile albe în urma celor n extrageri fără revenire. Cazurile favorabile lui X se determină ușor cu principiul multiplicării: avem C_a^k modalități diferite de a alege k bile albe din mulțimea bilelor albe existente în urnă și C_b^{n-k} modalități diferite de a face același lucru cu bilele negre. Combinând aceste modalități obținem toate cazurile favorabile și prin urmare, din principiul multiplicării, rezultă că numărul cazurilor favorabile este $C_a^k \cdot C_b^{n-k}$

Prin urmare, probabilitatea căutată este:

$$\tilde{P}_m(k) = \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}.$$

Exemplul 1.6.2 Un vameș a fost informat că printre cei 40 de pasageri ai vaporului care urmează să ancoreze în port se află doi contrabandiști. Câți pasageri trebuie el să aleagă în mod aleator la control, pentru ca probabilitatea de a prinde măcar un contrabandist să fie de cel puțin 0.9?

Soluție. Să presupunem că din cei 40 pasageri, se aleg aleator n persoane ($n \leq 40$). Atunci, conform schemei bilei nerevenite, probabilitatea ca printre cele n persoane astfel alese să se găsească k contrabandiști ($k = 0, 1, 2$) este

$$\frac{C_2^k C_{38}^{n-k}}{C_{40}^n}.$$

Prin urmare, probabilitatea ca printre cele n persoane să se găsească cel puțin un contrabandist este

$$\begin{aligned} & \frac{C_2^1 C_{38}^{n-1}}{C_{40}^n} + \frac{C_2^2 C_{38}^{n-2}}{C_{40}^n} \\ &= \frac{n!(40-n)!}{40!} \left(\frac{2 \cdot 38!}{(n-1)!(38-n+1)!} + \frac{38!}{(n-2)!(38-n+2)!} \right) \\ &= \frac{1}{39 \cdot 40} (79n - n^2). \end{aligned}$$

Mai trebuie doar să determinăm cea mai mică valoare a lui n pentru care avem

$$\frac{1}{39 \cdot 40} (79n - n^2) \geq \frac{9}{10}.$$

Se observă că această inegalitate este echivalentă cu

$$n^2 - 79n + 1404 \leq 0,$$

de unde rezultă că n trebuie să fie poziționat între valorile

$$n_{1,2} = \frac{1}{2} (79 \pm \sqrt{79^2 - 4 \cdot 1404}) = \frac{1}{2} (79 \pm 25).$$

În concluzie, vameșul trebuie să aleagă cel puțin 27 de pasageri pentru ca probabilitatea de a prinde măcar un contrabandist să fie de cel puțin 0.9.

1.6.4 Schema generalizată a bilei nerevenite

Acest model generalizează schema bilei nerevenite prezentată mai sus în aceeași manieră în care schema multinomială generalizează schema lui Bernoulli.

Astfel, presupunem că într-o urnă avem

a_1 bile de culoarea c_1 ,

a_2 bile de culoarea c_2 ,

$\vdots$

a_r bile de culoarea c_r .

Se fac n extrageri fără revenire din această urnă ($n \in \mathbf{N}^*$, $n \leq a_1 + \dots + a_r$), și se pune problema determinării probabilității ca printre cele n bile extrase să avem:

k_1 bile de culoarea c_1 ,

k_2 bile de culoarea c_2 ,

$\vdots$

k_r bile de culoarea c_r ,

unde, desigur, numerele naturale k_i verifică

$$0 \leq k_i \leq a_i, \quad \forall i = 1, \dots, r,$$

și

$$k_1 + \dots + k_r = n.$$

Această probabilitate o vom nota cu $\tilde{P}_n(k_1, k_2, \dots, k_m)$ și ea este dată prin următoarea formulă:

$$\tilde{P}_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{C_{a_1}^{k_1} C_{a_2}^{k_2} \dots C_{a_r}^{k_r}}{C_{a_1 + a_2 + \dots + a_r}^n}.$$

Justificarea se face printr-un raționament asemănător celui prezentat mai sus în cazul a două culori.

1.6.5 Schema lui Poisson

Această schemă generalizează și ea tot schema lui Bernoulli, dar într-o direcție diferită de cea prezentată la schema multinomială. Aici, cele n extrageri cu revenire sunt înlocuite cu efectuarea câte unei extrageri din n urne diferite (posibil diferite chiar și în ce privește compoziția de alb și negru). Detaliem în continuare elementele acestui model și formulele de calcul atașate lui.

Se dau n urne distincte $U_1, U_2, \dots, U_n$ astfel încât urna U_k conține a_k bile albe și b_k bile negre, $k \in \{1, \dots, n\}$. Numărul total de bile din urna U_i îl vom nota m_i , deci $m_i = a_i + b_i$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Din fiecare urnă se extrage câte o bilă. Notăm această experiență aleatoare cu $\mathcal{E}_{po}(n, \mathbf{a}, \mathbf{m})$ unde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ iar $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$.

Vrem să calculăm probabilitatea ca dintre cele n bile astfel extrase, k să fie albe ($0 \leq k \leq n$).

Probabilitatea căutată este egală cu coeficientul lui t^k din următorul polinom de grad n :

$$Q_n(t) = (p_1 t + q_1)(p_2 t + q_2) \dots (p_n t + q_n),$$

unde, pentru orice $k = 1, \dots, n$,

$$p_k := \frac{a_k}{a_k + b_k} = \frac{a_k}{m_k}$$

este probabilitatea de a extrage o bilă albă din U_k , iar $q_k := 1 - p_k$.

Într-adevăr, fie X probabilitatea de a obține k bile albe în urma efectuării experienței $\mathcal{E}_{po}(n, \mathbf{a}, \mathbf{m})$. La fel ca în cazul celei de-a doua variante de prezentare a schemei Bernoulli, vom pune și aici în evidență o partiție a evenimentului X .

Pentru aceasta considerăm F_n mulțimea tuturor funcțiilor

$$f : J_n \rightarrow \{0, 1\}.$$

Notăm cu $F_{n; k}$ mulțimea funcțiilor $f \in F_n$ care iau valoarea 1 de k ori, adică

$$F_{n; k} := \{f \in F_n \mid \text{să avem } |f^{-1}(1)| = k\}.$$

Fiecărei funcții $f \in F_n$ îi asociem în cadrul experienței $\mathcal{E}_{po}(n, \mathbf{a}, \mathbf{m})$ un eveniment aleator E_f , definit astfel:

E_f : evenimentul ca în urma efectuării experienței $\mathcal{E}_{po}(n, \mathbf{a}, \mathbf{m})$, la extragerea din urna U_i să obținem o bilă "de culoarea $f(i)$ ", $\forall i = 1, \dots, n$,

unde, pentru orice $i = 1, \dots, n$, prin bilă "de culoarea $f(i)$ " vom înțelege bilă albă dacă $f(i) = 1$, respectiv bilă neagră dacă $f(i) = 0$.

Însă fiecare eveniment E_f cu $f \in F_n$ este intersecția a n evenimente independente în totalitate:

$$E_f = \bigcap_{i=1}^n E_{f; i},$$

unde, pentru orice $i = 1, \dots, n$

$E_{f; i}$: evenimentul ca din urna U_i să extragem o bilă "de culoarea $f(i)$ ".

Din definiția independenței în totalitate, obținem imediat că

$$P(E_f) = \prod_{i=1}^n p_i^{f(i)} \cdot \prod_{i=1}^n q_i^{1-f(i)}, \quad \forall f \in F_n. \quad (1.20)$$

Este clar că sistemul de evenimente $(E_f)_{f \in F_{n; k}}$ formează o partiție a evenimentului X și prin urmare

$$P(X) = \sum_{f \in F_{n; k}} P(E_f). \quad (1.21)$$

Din definiția independenței în totalitate, obținem imediat că

$$P(E_f) = p^k \cdot q^{n-k}, \quad \forall f \in F_{n; k}(A).$$

Folosind atunci (1.21) și (1.20), rezultă că $P(X)$ este într-adevăr egală cu coeficientul lui t^k din polinomul $Q(t)$.

Observația 1.6.3 Dacă cele n urne au aceeași compoziție procentuală de "alb" (adică $p_1 = p_2 = \dots = p_n$), atunci se regăsește modelul schemei lui Bernoulli.

Exemplul 1.6.3 Trei bănci B_1, B_2, B_3 acordă credite de studiu, în mod independent una de alta, cu probabilitățile $p_1 = 0,6$, $p_1 = 0,9$ și respectiv $p_1 = 0,8$. Determinați probabilitatea ca un student care a depus o cerere de creditare la fiecare din cele trei bănci să primească două răspunsuri favorabile.

Soluție. Conform schemei lui Poisson, probabilitatea căutată este egală cu coeficientul lui t^2 în polinomul

$$Q_3(t) = (p_1t + q_1)(p_2t + q_2)(p_3t + q_3),$$

unde, pentru orice $k = 1, 2, 3$, $q_k := 1 - p_k$. În cazul nostru,

$$Q_3(t) = (0,6t + 0,4)(0,9t + 0,1)(0,8t + 0,2)$$

și deci coeficientul lui t^2 este

$$0,6 \cdot 0,9 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,9 \cdot 0,8 = 0,444.$$

1.7 Exerciții și probleme

1. Fie U o urnă ce conține două bile albe și două negre. Din urna U se fac două extrageri cu revenire. Se consideră evenimentele:
 A_1 : "la prima extragere apare o bilă albă"
 A_2 : "la a doua extragere apare o bilă albă"
 A_3 : "la prima extragere apare o bilă neagră"
 A_4 : "la a doua extragere apare o bilă neagră"
 A_5 : "apare cel puțin o dată o bilă neagră"
 A_6 : "apare cel puțin o dată o bilă albă"
 A_7 : "apare o bilă neagră și o bilă albă"
 A_8 : "apar doar bile negre"
 A_9 : "apare bila albă de două ori"

Evaluați evenimentele (1) $A_1 \cup A_3$; (2) $A_1 \cap A_3$; (3) $A_5 \cap A_6$; (4) $A_6 \cap A_7$; (5) $A_6 \cup A_7$; (6) $A_3 \cap A_4$; (7) $A_6 \cap A_9$.

2. O firmă folosește n mașini automate, fiecare dintre acestea putând să se defecteze într-o perioadă dată de timp t . Fie evenimentele aleatoare:

A_i : "mașina i nu se defectează în perioada de timp t "
 B_i : " i mașini s-au defectat în perioada de timp t "
 C : "cel puțin o mașină nu s-a defectat în perioada de timp t "
 $i = 1, \dots, n$.

Să se explicitizeze evenimentele B_i și C în raport cu evenimentele A_i , $i = 1, \dots, n$.
3. Se controlează calitatea a n produse. Fie evenimentele aleatoare

X_i : "cel puțin i sunt defecte"
 $i = 1, \dots, n$. Precizați ce reprezintă evenimentele: $\overline{X}_i$, $\overline{X_{n-1} \cup X_n}$, $\overline{X}_1 \cup \overline{X}_2$.
4. Fiind dată o experiență aleatoare $\mathcal{E}$ și A și B evenimentele asociate ei, determinați acel eveniment X care verifică relația $\overline{X} \cup A \cup X \cap A = B$.
5. Determinați numărul de evenimente aleatoare ce pot fi asociate unei experiențe aleatoare $\mathcal{E}$ al cărei spațiu de selecție S are n elemente.
6. Fie $\mathcal{E}$ o experiență aleatoare, S spațiul său de selecție și A un eveniment asociat ei. În funcție de numărul rezultatelor favorabile evenimentului A , determinați numărul evenimentelor care sunt implicate de A (respectiv $\overline{A}$), dacă S are n elemente.
7. O urnă conține n_1 bile albe, n_2 bile negre și n_3 bile roșii. În funcție de tipul de extragere (cu revenire, resp. fără revenire), să se determine probabilitatea ca extrăgând în mod aleator 3 bile din această urnă, ele să fie de culori diferite.
8. Se aruncă un zar de 4 ori. Să se calculeze
 - a) probabilitatea să apară cel puțin odată fața cu 4 puncte;
 - b) probabilitatea ca numărul maxim de puncte apărut să fie 4.
9. Să se descrie experiența aleatoare ce constă în repartizarea a N bile în m urne $U_1, \dots, U_m$ și să se calculeze probabilitățile
 - a) probabilitatea ca U_1 să conțină k bile ($k = 0, \dots, n$);
 - b) probabilitatea ca U_1 și U_2 să conțină același număr de bile;
 - c) probabilitatea să avem cel puțin o urnă goală.
10. Într-un tren se află n călători. Determinați:
 - a) probabilitatea ca în prima stație să coboare r ($0 \leq r \leq n$) persoane;

- b) probabilitatea ca în fiecare dintre cele m stații în care oprește trenul să se dea jos cel mult un călător.
11. În cele trei vagoane ale unui tramvai s-au urcat, întâmplător, nouă călători. Se cere probabilitatea ca:
- în primul vagon să se afle 3 persoane;
 - în fiecare vagon să se afle câte 3 persoane;
 - în unul din vagoane să se afle 2 persoane, în altul 3 și în al treilea 4 persoane.
12. Se aruncă o monedă de 3 ori. Considerăm evenimentele
- A_i : "la aruncarea i s-a obținut stema";
 $i = 1, 2, 3$. Sunt evenimentele A_1, A_2, A_3 independente în totalitate?
13. Dacă $A_1, A_2, \dots, A_n$ sunt evenimente independente în totalitate, să se demonstreze formula:
- $$P(\cup_{i=1}^n A_i) = 1 - (1 - P(A_1)) \dots (1 - P(A_n)).$$
14. La fabricarea unei piese se utilizează n mașini automate. Notăm cu p_i probabilitatea ca mașina i să strice piesa, $i = 1, \dots, n$. Determinați probabilitatea de a fabrica o piesă defectă.
15. Întreaga producție de piese a unei firme este realizată în atelierele $A_1, A_2, \dots, A_n$. Se știe că proporția pieselor defecte realizate de atelierul A_i este p_i , $i = 1, \dots, n$. Se alege la întâmplare din producția de piese a fiecărui atelier câte o piesă și se cere probabilitatea ca printre cele n piese astfel alese cel puțin una să fie defectă.
16. Să se determine $P(C)$ știind că $P(\overline{A \cup B} | C) = P(A \cup B | \overline{C}) = \frac{3}{10}$ și $P(C | A \cup B) = \frac{6}{10}$.
17. Fie A, B două evenimente astfel încât

$$P(A) \cdot P(B) \cdot (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) = 0.$$

Să se arate că A și B sunt independente.

18. Fie A, B, C trei evenimente independente. Să se arate că dacă $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$ și $A \cap B \cap C$ sunt independente, atunci

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)P(C)) = 0.$$

19. Știind că dintr-un lot de 100 piese produse de o firmă F , 30 provin de la atelierul A_1 , 60 provin de la atelierul A_2 și 10 de la atelierul A_3 , precum și faptul că procentajele de piese defecte realizate de fiecare atelier în parte sunt de 5%, 3%, respectiv (1%), să se determine
- probabilitatea ca alegând o piesă la întâmplare din întregul lot de piese, ea să fie bună;
 - probabilitatea ca alegând o piesă la întâmplare din întregul lot de piese, ea să provină de la A_2 , dacă s-a constatat că ea este defectă;
 - sumele cu care trebuie penalizat fiecare atelier în parte, dacă în urma punerii în vânzare a celor 100 piese suma totală pe care firma a trebuit să o restituie clienților pe motiv că piesele cumpărate prezintă defecte s-a ridicat la 50 milioane lei, iar proveniența exactă a pieselor defecte nu este cunoscută.
20. Într-un depozit se aduc piese de la 4 ateliere. Primul atelier are 2 mașini care fabrică piese și dă 4% rebuturi; al doilea are 5 mașini și dă 5% rebuturi; al treilea are 10 mașini și dă 8% rebuturi, iar al patrulea are 3 mașini și dă 3% rebuturi. Din depozit s-a luat o piesă care s-a dovedit a fi defectă.
- Care este probabilitatea ca piesa să provină de la al doilea atelier?
 - Care este probabilitatea ca piesa să provină de la al patrulea atelier?
21. Într-o fabrică se produc becuri de tipul I și de tipul II. Se știe că 10% din becurile de tipul I și 20% din becurile de tipul II au o perioadă de viață de mai mult de 250 de ore. Se disting următoarele cazuri:
- din fiecare tip se produce același număr de becuri;
 - se produc de patru ori mai multe becuri de tipul I decât de tipul II.
- Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare un bec, să se obțină unul a cărui durată de viață să fie mai mare de 250 de ore?
22. Din N subiecte ale unui examen oral, a sunt "ușoare". Doi studenți aleg pe rând câte un subiect. Care este probabilitatea ca:
- Primul student să aleagă un subiect "ușor"?
 - Al doilea student să aleagă un subiect "ușor"?
 - Ambii studenți să aleagă subiecte "ușoare"?
 - Cel puțin unul dintre cei doi studenți să aleagă un subiect "ușor".
23. Examinând producția de piese ale unei firme de-a lungul unei zile, se constată că 4% dintre ele sunt defecte, iar dintre piesele bune doar 75% sunt de primă calitate. Se extrage la întâmplare o piesă. Să se determine probabilitatea ca ea să fie de primă calitate.

24. Procentajul de promovare la examenul de statistică este de 60%. Care este probabilitatea ca dintr-un grup de 30 de studenți să fie admiși 20?
25. Dintr-un lot de 100 de piese, 20 piese au defecte remediabile, 10 sunt rebuturi, iar restul sunt bune. Din lot au fost luate la întâmplare 10 piese. Care este probabilitatea ca dintre acestea 6 să fie bune, 3 cu defecte remediabile, iar 1 să fie rebut?
26. Dintr-o urnă cu 49 de bile, dintre care 43 albe și 6 negre, se extrag aleator și fără întoarcere 7 bile. Care este probabilitatea ca dintre primele 6 bile extrase 3 să fie negre, iar a 7-a bilă să fie albă?
27. La un control de calitate se examinează 4 loturi de produse. Probabilitățile ca aceste loturi să corespundă cerințelor sunt de 0,8; 0,7; 0,9 și respectiv 0,85.
 - (a) Să se determine probabilitatea ca toate cele 4 loturi de produse examinate să corespundă cerințelor;
 - (b) Să se determine probabilitatea ca 3 loturi să corespundă cerințelor și unul nu.
28. Pentru ca o firmă să primească un credit, i se pun în vedere 4 condiții. Dacă firma îndeplinește cel puțin 2 dintre ele, atunci i se va acorda creditul. Dacă firma îndeplinește doar o condiție, atunci probabilitatea să i se acorde creditul este de 0,6. Neîndeplinirea nici unei condiții duce la neacordarea creditului. Se cere probabilitatea ca firmei să i se acorde creditul, știind că șansa ei de a îndeplini o condiție oarecare este de 0,3.
29. Un aparat se compune din 5 elemente. Fiabilitatea aparatului (probabilitatea de funcționare într-un timp dat) relativă la intervalele de timp t corespunzătoare celor 5 elemente este: 0,9; 0,95; 0,8; 0,85; 0,91. Dacă nici un element nu se defectează, probabilitatea de funcționare este 1. Dacă unul dintre cele 5 elemente se defectează, probabilitatea de funcționare este 0,7. Dacă se defectează mai mult de un element, atunci aparatul nu mai funcționează. Determinați probabilitatea ca aparatul să funcționeze.
30. În anul I de studii sunt 600 de fete și 400 de băieți. În scopul unui sondaj privind opinia studenților asupra programului de studiu se aleg la întâmplare 10 studenți.
 - (a) Determinați probabilitatea ca în acest grup să fie 6 fete și 4 băieți.
 - (b) Care este probabilitatea ca în acest grup să fie cel puțin 5 fete și cel puțin 1 băiat?

31. Un aparat se compune din 2 subansamble, funcționarea fiecăruia fiind esențială pentru funcționarea aparatului. Fiabilitatea primului subansamblu este de p_1 , iar a celui de-al doilea de p_2 . Aparatul a fost pus sub observație un timp t , în care s-a stabilit că a suferit o pană. Să se găsească probabilitatea ca nefuncționarea să se datoreze primului subansamblu.
32. Un aparat compus din k componente funcționează în intervalul t . Fiabilitatea fiecărei componente în acest interval t este p . După timpul t , aparatul se oprește și este revizuit de un tehnician care înlocuiește componentele defecte. Pentru înlocuirea unei componente oarecare este nevoie de t_1 unități de timp. Se cere probabilitatea ca aparatul să poată funcționa după $2t_1$ unități de timp de la momentul opririi (adică probabilitatea ca în $2t_1$ unități de timp să se schimbe cel mult 2 componente).
33. (**Problema lui Banach**). Un fumător cumpără două cutii de chibrituri, fiecare conținând n bețe. Apoi, de fiecare dată când are nevoie de un chibrit, scoate la întâmplare o cutie din care consumă un băț. Care este probabilitatea ca în momentul în care constată că o cutie este goală cealaltă să mai conțină k bețe?

Capitolul 2

Variabile aleatoare

Noțiunea de variabilă aleatoare este una dintre cele mai importante concepte ale teoriei probabilităților. Primul care a introdus această noțiune a fost *Cebâșev* (1821-1884), pe la mijlocul secolului al XIX-lea. El a definit variabila aleatoare astfel:

"o variabilă reală care ia diferite valori cu diferite probabilități."

Această definiție este destul de aproape de spiritul modern al conceptului, dar lasă, totuși, mult de dorit din punctul de vedere al rigorii matematice.

Exemplul 2.0.1 Să considerăm problema determinării probabilității ca suma punctelor obținute în urma aruncării a două zaruri să fie cel puțin 3 și cel mult 5. Notând cu X caracteristica de interes pentru această problemă, adică suma punctelor obținute după aruncarea celor două zaruri, se constată că X este de fapt o *funcție* care asociază câte un număr natural (reprezentând suma punctelor) fiecărui rezultat posibil al experienței $\mathcal{E}_{Z^2}$. Prin urmare

$$X : \Omega_{Z^2} \rightarrow \{2, 3, \dots, 12\},$$

$$X((i, j)) = i + j, \quad \forall i, j = 1, \dots, 6,$$

unde $\Omega_{Z^2} = \{(i, j) \mid i, j = 1, \dots, 6\}$ este spațiul de selecție asociat experienței $\mathcal{E}_{Z^2}$.

Notăm evenimentele elementare cu $A_{(i,j)}$, $\forall i, j = 1, \dots, 6$ și definim pentru $s = 2, \dots, 12$ următoarele evenimente:

$\{X = s\}$: evenimentul ca în urma aruncării celor două zaruri, suma punctelor obținute să fie s .

Dacă $s = 3, 4, 5$ avem în mod evident următoarele caracterizări:

$$\begin{aligned}\{X = 3\} &= A_{(1,2)} \cup A_{(2,1)}, \\ \{X = 4\} &= A_{(1,3)} \cup A_{(2,2)} \cup A_{(3,1)}, \\ \{X = 5\} &= A_{(1,4)} \cup A_{(2,3)} \cup A_{(3,2)} \cup A_{(4,1)}.\end{aligned}$$

Având în vedere că pentru această experiență aleatoare mulțimea de evenimente asociată este $\mathcal{P}(\Omega_{Z^2})$ și că ea este probabilitată utilizând definiția clasică a probabilității, rezultă că

$$P(A_{(i,j)}) = \frac{1}{36}, \forall i, j = 1, \dots, 6.$$

Probabilitatea oricărui eveniment de forma $\{X = s\}$ se notează cu $P(X = s)$ și din reprezentările de mai sus rezultă:

$$P(X = 3) = \frac{2}{36}, P(X = 4) = \frac{3}{36}, P(X = 5) = \frac{4}{36}.$$

Evenimentul ca X să fie cel puțin 3 și cel mult 5 se notează cu $\{3 \leq X \leq 5\}$, iar probabilitatea sa o vom nota cu $P(3 \leq X \leq 5)$. El se poate evident reprezenta sub forma:

$$\{3 \leq X \leq 5\} = \{X = 3\} \cup \{X = 4\} \cup \{X = 5\}.$$

Prin urmare, probabilitatea cerută este

$$\begin{aligned}P(3 \leq X \leq 5) &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= \frac{9}{36} = \frac{1}{4},\end{aligned}$$

deoarece cele trei evenimente din reuniune sunt două câte două incompatibile.

Analog pot fi determinate și alte probabilități de forma $P(X = s)$ sau $P(a \leq X \leq b)$, $a, b \in \mathbf{N}$.

Din cele de mai sus rezultă că X este o funcție care ia, într-adevăr, diverse valori cu diverse probabilități și ea constituie un prim exemplu de variabilă aleatoare.

Fie acum $\mathcal{E}$ o experiență aleatoare oarecare și fie Ω spațiul său de selecție.

Din punct de vedere intuitiv, o variabilă aleatoare este o *funcție* X definită pe mulțimea Ω a rezultatelor posibile ale experienței aleatoare $\mathcal{E}$ și cu valori, în general, în $\mathbf{R}$ (sau $\mathbf{R}^n$) și care, în plus, satisface anumite *condiții de compatibilitate* cu o algebră sau σ -algebră de evenimente $\mathcal{K}$ anterior precizată sau dedusă din contextul concret al fiecărei probleme. Mulțimea $\mathcal{K}$ este, în general, probabilitată pe baza uneia dintre definițiile probabilității și odată precizat acest cadru de lucru toate noțiunile ulterioare se vor da relativ la elementele lui. Condițiile suplimentare pe care trebuie să le satisfacă funcția X pentru a fi variabilă aleatoare sunt deci necesare pentru a putea răspunde la întrebări de tipul:

”Cu ce probabilitate ia X valori în intervalul D ?”,

unde D este un interval din $\mathbf{R}$ (respectiv $\mathbf{R}^n$), $a, b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$. Cu alte cuvinte, mulțimile de forma

$$\{w \in \Omega | X(w) \in D\} \quad (2.1)$$

trebuie să fie reprezentarea unui eveniment aleator din $\mathcal{K}$ pentru a putea fi evaluată probabilitatea cerută. Notăm atât acest eveniment, cât și reprezentarea sa (2.1) prin $\{X \in D\}$ sau prin $X^{-1}(D)$ (ultima variantă denotație provine din teoria mulțimilor unde este binecunoscută sub numele de preimaginea lui D prin intermediul funcției X).

Observația 2.0.1 Notățiile de mai sus se adaptează în funcție de cazul concret aflat în discuție:

$$\{X < x\} \stackrel{\text{not}}{=} \{\omega \in \Omega | X(\omega) < x\}, (\forall)x \in \mathbf{R}; \quad (2.2)$$

$$\{X \leq x\} \stackrel{\text{not}}{=} \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}, (\forall)x \in \mathbf{R}; \quad (2.3)$$

$$\{X > x\} \stackrel{\text{not}}{=} \{\omega \in \Omega | X(\omega) > x\}, (\forall)x \in \mathbf{R}; \quad (2.4)$$

$$\{a \leq X < b\} \stackrel{\text{not}}{=} \{\omega \in \Omega | a \leq X(\omega) < b\}, (\forall)a, b \in \mathbf{R}, a \leq b; \quad (2.5)$$

$$\{a \leq X \leq b\} \stackrel{\text{not}}{=} \{\omega \in \Omega | a \leq X(\omega) \leq b\}, (\forall)a, b \in \mathbf{R}, a \leq b. \quad (2.6)$$

Sintetizăm acum câteva din ideile de mai sus în următoarea definiție generală a variabilelor aleatoare cu valori în $\mathbf{R}$ (analog se poate face și pentru cazul $\mathbf{R}^n$):

Definiția 2.0.1 Dacă Ω este spațiul de selecție al unei experiențe aleatoare $\mathcal{E}$, iar $\mathcal{A}$ este o algebră de evenimente asociate ei, vom spune că $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ este o variabilă aleatoare reală în raport cu $\mathcal{A}$ dacă:

$$\{X < x\} \in \mathcal{A}, (\forall)x \in \mathbf{R}. \quad (2.7)$$

Vom nota cu $\mathcal{V}(\Omega, \mathbf{R})$ familia acestor variabile aleatoare.

Observația 2.0.2 Dacă $(\Omega, \mathcal{K})$ este un câmp de evenimente (sau dacă $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ este un câmp de probabilitate) asociat lui $\mathcal{E}$, iar X este o variabilă aleatoare în raport cu $\mathcal{K}$, vom spune adesea că X este o variabilă aleatoare pe câmpul de evenimente $(\Omega, \mathcal{K})$ (respectiv, pe câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$).

Se observă că noțiunea de variabilă aleatoare este întotdeauna definită *relativ* la un spațiu de evenimente $\mathcal{A}$. Astfel, o funcție reală de genul celor prezentate mai sus poate să *nu* fie variabilă aleatoare în raport cu un spațiu de evenimente particular $\mathcal{A}$, dar aceasta nu înseamnă că ea nu poate fi variabilă aleatoare în raport cu un alt spațiu de evenimente. Mai mult, pentru orice astfel de funcție reală există, desigur, cel puțin o algebră de evenimente $\mathcal{A}$ în raport cu care aceea funcție devine variabilă aleatoare.

Exemplul 2.0.2 Să considerăm o experiență aleatoare cu spațiul de selecție $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ și următorul câmp de evenimente:

$$\mathcal{K} = \{\Omega, \emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}. \quad (2.8)$$

Atunci funcția $X : \Omega \rightarrow \{1, 2\}$ dată prin:

$$X(1) = X(2) = 1, \quad X(3) = X(4) = 2$$

este o variabilă aleatoare în raport cu $\mathcal{K}$.

Într-adevăr, $X^{-1}(x) = \emptyset \in \mathcal{K}$ dacă $x \notin \{1, 2\}$ și $X^{-1}(1) = \{1, 2\} \in \mathcal{K}$, $X^{-1}(2) = \{3, 4\} \in \mathcal{K}$ și deci, conform punctului b) al observației de mai sus, X este o variabilă aleatoare discretă.

Exemplul 2.0.3 În același cadru ca în exemplu anterior, să considerăm aplicația $Y : \Omega \rightarrow \{1, 2\}$ dată prin:

$$Y(1) = Y(2) = Y(3) = 1, \quad Y(4) = 0$$

O astfel de funcție nu este o variabilă aleatoare în raport cu $\mathcal{K}$, deoarece $Y^{-1}(0) = \{4\} \notin \mathcal{K}$

Exemplul 2.0.4 Pentru orice eveniment A asociat lui $\mathcal{E}$ putem defini funcția sa caracteristică:

$$\varphi_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}, \quad \varphi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \omega \in A_\Omega \\ 0 & \text{dacă } \omega \notin A_\Omega \end{cases} \quad (2.9)$$

unde A_Ω este reprezentarea lui A .

Ne putem pune atunci întrebarea: în ce condiții devine φ_A o variabilă aleatoare?

Este clar că φ_A este o variabilă aleatoare în raport cu algebra $\mathcal{A}$ dacă și numai dacă $A \in \mathcal{A}$.

Definirea variabilelor aleatoare reale am făcut-o utilizând evenimente de forma $\{X < x\}$, însă se putea face foarte bine utilizând și alte tipuri de evenimente, așa după cum rezultă din propoziția următoare:

Propoziția 2.0.1 O funcție $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ este o variabilă aleatoare pe câmpul de evenimente $(\Omega, \mathcal{K})$ dacă și numai dacă una din proprietățile de mai jos este verificată:

- 1) $\{X < x\} \in \mathcal{K}, \forall x \in \mathbf{Q};$
- 2) $\{X \leq x\} \in \mathcal{K}, \forall x \in \mathbf{R};$
- 3) $\{X > x\} \in \mathcal{K}, \forall x \in \mathbf{R};$
- 4) $\{a \leq X < b\} \in \mathcal{K}, \forall a, b \in \mathbf{R}, a \leq b;$
- 5) $\{a \leq X \leq b\} \in \mathcal{K}, \forall a, b \in \mathbf{R}, a \leq b;$
- 6) $\{X \in D\} \in \mathcal{K}, \forall D \in \mathcal{D}$ (mulțimea deschiselor în $\mathbf{R}$);
- 7) $\{X \in F\} \in \mathcal{K}, \forall F \in \mathcal{F}$ (mulțimea închiselor în $\mathbf{R}$).

Observația 2.0.3 Noțiunea de variabilă aleatoare este deci o particularizare a noțiunii de funcție măsurabilă din teoria măsurii.

Să considerăm o variabilă aleatoare reală X . Vom nota imaginea lui Ω prin X cu $X(\Omega)$, adică

$$X(\Omega) := \{X(\omega) | \omega \in \Omega\}. \quad (2.10)$$

Definiția 2.0.2 Vom spune că X este o **variabilă aleatoare discretă** dacă $X(\Omega)$ este cel mult numărabilă.

Dacă X ia doar un număr finit de valori o vom numi **variabilă aleatoare simplă**.

Descrierea variabilelor aleatoare discrete se face pe baza noțiunilor date în definiția următoare.

Definiția 2.0.3 Dacă X este o variabilă aleatoare reală discretă ale cărei valori ordonate crescător sunt

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$$

și dacă

$$p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$$

sunt probabilitățile cu care X ia aceste valori (adică $P(X = x_i) = p_i, \forall i = 0, 1, \dots$), atunci vom reprezenta X printr-un tablou de forma:

$$X \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n & \dots \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

numit **tabloul de repartiție** (sau **repartiția**) variabilei aleatoare X .

Funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ dată prin

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} p_i & \text{dacă } x = x_i, i = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \{x_i | i = 0, 1, \dots\}, \end{cases} \quad (2.12)$$

se numește **funcție de frecvențe sau funcție de probabilitate**.

Observația 2.0.4 Pentru tabloul de repartiție al unei variabile discrete X care ia valorile $\{x_i | i \in J\}$ ($J \subseteq \mathbf{N}$) vom folosi de multe ori notația

$$X \left(\begin{array}{c} x_i \\ p_i \end{array} \right)_{i \in J}. \quad (2.13)$$

Astfel, dacă X este o variabilă simplă care ia valorile (ordonate crescător) $x_1, x_2, \dots, x_n$ cu probabilitățile $p_1, p_2, \dots, p_n$, atunci tabloul său de repartiție este

$$X \left(\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array} \right), \quad (2.14)$$

sau, într-o formă condensată,

$$X \left(\begin{array}{c} x_i \\ p_i \end{array} \right)_{i \in J_n}, \quad (2.15)$$

unde $J_n = \{1, \dots, n\}$.

Propoziția 2.0.2 Dacă X este o variabilă aleatoare discretă având tabloul de repartiție (2.11), atunci

$$\sum_{n \in N} p_n = 1. \quad (2.16)$$

Cu alte cuvinte, suma elementelor de pe linia a doua, din orice tablou de repartiție, este 1.

Demonstrația acestei propoziții rezultă imediat din faptul că sistemul de evenimente aleatoare $\{X = x_i\}$, $i = 0, 1, \dots$ constituie un sistem complet de evenimente.

Exemplul 2.0.5 Să revenim la variabila aleatoare X descrisă în exemplul 2.0.1. Conform definițiilor anterioare, X este o variabilă aleatoare simplă. După ce evaluăm într-o manieră similară cu cea dată în exemplul precizat mai sus toate probabilitățile cu care X ia fiecare din cele 11 valori, se obține următorul tablou de repartiție:

$$X \left(\begin{array}{cccccccccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{array} \right) \quad (2.17)$$

Se observă și aici că suma elementelor de pe linia a doua este 1.

Fie acum X o variabilă aleatoare simplă definită pe câmpul de evenimente $(\Omega, \mathcal{K})$ și fie $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Evident, evenimentele $A_i = \{X = x_i\}$, $i = 1, \dots, n$ constituie o partiție a evenimentului sigur.

Utilizând funcțiile caracteristice asociate acestor evenimente, este clar că putem scrie variabila aleatoare X sub forma:

$$X = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \varphi_{A_i}.$$

Această scriere poartă numele de **formă standard**. Să remarcăm că forma standard este unic determinată de valorile x_i , $i = 1, \dots, n$ și partiția A_i , $i = 1, \dots, n$ corespunzătoare acestora.

Se poate arăta că și reciproca este adevărată, adică pentru orice sistem de n valori reale distincte x_i , $i = 1, \dots, n$ și pentru orice sistem de n evenimente aleatoare A_i , $i = 1, \dots, n$ ce formează o partiție a evenimentului sigur, relația (2) descrie o variabilă aleatoare simplă.

Mai mult, orice combinație liniară finită de funcții caracteristice ale unor evenimente din $\mathcal{K}$ este o variabilă aleatoare simplă. Cu alte cuvinte, are loc:

Teorema 2.0.1 Dacă $Y = \sum_{j=1}^m y_j \cdot \varphi_{B_j}$, $y_j \in \mathbf{R}$ și $B_j \in \mathcal{K}$, $j = 1, \dots, m$, atunci Y este o variabilă aleatoare simplă.

Operațiile elementare cu funcții se transpun în mod natural și la variabilele aleatoare. De exemplu, pentru cazul variabilelor aleatoare simple, avem următoarea caracterizare:

Propoziția 2.0.3 Dacă X, Y sunt variabile aleatoare simple, atunci $X+Y$, $X \cdot Y$, αX ($\alpha \in \mathbf{R}$), $|X|$, $\frac{1}{X}$ (dacă $X \neq 0$) sunt de asemenea variabile aleatoare simple.

Demonstrația rezultă imediat din Teorema 2.0.1.

Rezultate similare au loc și în cadrul mulțimii variabilelor discrete, cât și în cadrul mulțimii tuturor variabilelor aleatoare reale.

Până acum am discutat doar despre variabile aleatoare reale, însă într-o manieră similară pot fi definite și variabile aleatoare care iau valori în spații mult mai generale, ca de exemplu în $\mathbf{R}^n$ sau într-un spațiu metric oarecare.

Pentru a nu complica prea mult lucrurile, ne vom mărgini doar la cazul lui $\mathbf{R}^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$). Tot de dragul simplității, vom construi noile noțiuni pe baza noțiunii de variabilă aleatoare reală deja introdusă mai sus.

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un câmp de probabilitate și fie $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ o funcție. Notăm cu $X_1, X_2, \dots, X_n$ cele n componente reale ale aplicației X , adică

$$X_i : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

și

$$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)), \quad (\forall) \omega \in \Omega. \quad (2.18)$$

Vom scrie prescurtat

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Definiția 2.0.4 Vom spune că X este un **vector aleator n dimensional** dacă toate cele n componente ale sale sunt variabile aleatoare reale.

La fel ca și în cazul variabilelor aleatoare, vom spune că un vector aleator $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ este **discret** (respectiv **simplu**) dacă $X(\Omega)$ este o mulțime cel mult numărabilă (respectiv finită) din $\mathbf{R}^n$.

Propoziția 2.0.4 $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ este un vector aleator dacă și numai dacă $\langle a, X \rangle$ este o variabilă aleatoare reală, oricare ar fi vectorul real $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, unde

$$\langle a, X \rangle(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i(\omega), \quad (\forall) \omega \in \Omega \quad (2.19)$$

este produsul scalar uzual a doi vectori din $\mathbf{R}^n$.

Analog se pot defini și variabilele aleatoare cu valori în mulțimea numerelor complexe (este suficient să luăm $n = 2$ în definiția anterioară și să folosim identificarea canonică dintre $\mathbf{R}^2$ și $\mathbf{C}$):

Definiția 2.0.5 O aplicație

$$X : \Omega \rightarrow \mathbf{C} \quad (2.20)$$

poartă numele de **variabilă aleatoare complexă** dacă $Re(X)$ (i.e. partea reală a lui X) și $Im(X)$ (i.e. partea imaginară a lui X) sunt variabile aleatoare reale.

Reamintim că:

$$X(\omega) = Re(X)(\omega) + i \cdot Im(X)(\omega), \quad (\forall) \omega \in \Omega \quad (2.21)$$

$$Re(X)(\omega) = \frac{X(\omega) + \overline{X}(\omega)}{2}, \quad (\forall) \omega \in \Omega \quad (2.22)$$

$$Im(X)(\omega) = \frac{X(\omega) - \overline{X}(\omega)}{2i}, \quad (\forall) \omega \in \Omega, \quad (2.23)$$

unde $\overline{X}(\omega)$ este conjugatul numărului complex $X(\omega)$.

2.1 Funcții de repartiție

Definiția 2.1.1 Fie X o variabilă aleatoare reală pe câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$. Atunci funcția $F : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ dată prin

$$F(x) = P(X < x) \stackrel{\text{not}}{=} P(\omega \in \Omega | X(\omega) < x) \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad (2.24)$$

poartă numele de **funcția de repartiție** a variabilei aleatoare X .

Observația 2.1.1 În situațiile în care se lucrează cu mai multe variabile aleatoare, funcția de repartiție a unei variabile aleatoare X se mai notează uneori cu F_X pentru a preciza mai clar cărei variabile îi este asociată.

Dacă X este o variabilă aleatoare discretă având tabloul de repartiție (2.11) și funcția de frecvențe (2.12), atunci pentru funcția de repartiție se evaluează cu formula:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} f(x_i), \quad \forall x \in \mathbf{R}. \quad (2.25)$$

Cu alte cuvinte, funcția de repartiție în punctul x a unei variabile aleatoare discrete este dată de suma probabilităților corespunzătoare valorilor pe care X le ia la stânga lui x .

În cazul în care X este o variabilă aleatoare simplă cu tabloul de repartiție

$$X \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

atunci, cu ajutorul formulei (2.25), obținem următoarea explicitare a funcției de repartiție a lui X :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1 \\ p_1, & x \in (x_1, x_2] \\ p_1 + p_2, & x \in (x_2, x_3] \\ \vdots & \\ 1, & x > x_n \end{cases} \quad (2.27)$$

Punem în evidență în continuare proprietățile de bază ale unei funcții de repartiție.

Teorema 2.1.1 Funcția sa de repartiție F asociată unei variabile aleatoare reale X are următoarele proprietăți:

(F1). F este monoton crescătoare pe $\mathbf{R}$, adică

$$x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y), \quad \forall x, y \in \mathbf{R};$$

(F2). F este continuă la stânga pe $\mathbf{R}$, adică

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x < y}} F(x) = F(y), \forall x, y \in \mathbf{R};$$

(F3). F are limite la $\pm\infty$, și anume:

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \text{ și } F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 \quad (2.28)$$

De remarcat ar fi faptul că din (F1) și (F2) rezultă că toate funcțiile de repartiție au limită la dreapta în orice punct al dreptei reale.

Faptul că proprietățile descrise în teorema 2.1.1 sunt definitorii pentru funcțiile de repartiție rezultă din următorul rezultat:

Teorema 2.1.2 *Dacă $F : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ are proprietățile (F1)-(F4) din Teorema 2.1.1, atunci există un câmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ și o variabilă aleatoare reală X astfel încât F este chiar funcția de repartiție a lui X .*

Există, desigur, variabile aleatoare diferite care au totuși aceeași funcție de repartiție. Prin urmare, funcțiile de repartiție pot fi folosite la împărțirea variabilelor aleatoare în clase de echivalență (toate variabilele aleatoare care au aceeași funcție de repartiție formează o astfel de clasă de echivalență).

Definiția 2.1.2 *Vom spune despre două sau mai multe variabile aleatoare că sunt identic repartizate (sau identic distribuite) dacă ele au aceeași funcție de repartiție.*

Un caz banal în care avem de-a face cu două variabile X, Y identic distribuite este acela în care probabilitatea ca X să fie diferit de Y este 0, adică

$$P(X \neq Y) = P(\{\omega | X(\omega) \neq Y(\omega)\}) = 0,$$

sau, echivalent,

$$P(X = Y) = 1.$$

Vom spune atunci că X coincide (sau este egal) cu Y aproape sigur și vom nota

$$X = Y \text{ a.s.}$$

În general, însă, avem definiția următoare:

Definiția 2.1.3 *Dacă o anumită proprietate $\mathbf{P}$ a unui sistem aleator are loc cu probabilitatea 1, vom spune că $\mathbf{P}$ are loc aproape sigur și notăm*

$$\mathbf{P} \text{ a.s.}$$

Să analizăm acum câteva formule foarte utile de evaluare a probabilității ca o variabilă aleatoare să ia valori într-un interval:

Propoziția 2.1.1 *Dacă F este funcția de repartiție a variabilei X , atunci*

1. $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$;
2. $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = b)$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$;
3. $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = a)$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$;
4. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) - P(X = a) + P(X = b)$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$;
5. $P(X = x) = F(x+) - F(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, unde prin $F(x+)$ s-a notat limita lui F la dreapta în x .

Demonstrație. Din $a \leq b$ rezultă că $\{X < a\} \subseteq \{X < b\}$ și cum

$$\{a \leq X < b\} = \{X < b\} \setminus \{X < a\},$$

rezultă că

$$P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a).$$

Folosind apoi faptul că

$$\{a \leq X \leq b\} = \{a \leq X < b\} \cup \{X = b\}$$

și că această reuniune este formată din evenimente incompatibile, obținem

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) + P(X = b) = F(b) - F(a) + P(X = b).$$

Analog se demonstrează și următoarele două proprietăți.

Pentru ultima proprietate, folosind faptul că F este monotonă, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x + \frac{1}{n}) = F(x+)$$

și prin urmare

$$\begin{aligned} P(\{X = x\}) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \leq X < x + \frac{1}{n}\right\}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(x \leq X < x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F_f(x + \frac{1}{n}) - F_f(x)) \\ &= F_f(x+) - F_f(x). \end{aligned}$$

■

Și în cazul vectorilor aleatori se poate defini noțiunea de funcție de repartiție în felul următor:

Definiția 2.1.4 Dacă $X = (X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ este un vector aleator n -dimensional, atunci funcția $F : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, 1]$, dată prin

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n) \\ &= P(\{X_1 < x_1\} \cap \{X_2 < x_2\} \cap \dots \cap \{X_n < x_n\}), \end{aligned}$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, poartă numele de **funcția de repartiție a vectorului aleator** X .

Teorema următoare rezumă principalele proprietăți ale funcțiilor de repartiție asociate vectorilor aleatori:

Teorema 2.1.3 Funcția de repartiție F a unui vector aleator X are următoarele proprietăți:

(F_n1) Dacă $x, h \in \mathbf{R}^n$, atunci

$$\Delta_{h_1}^1 \Delta_{h_2}^2 \cdots \Delta_{h_n}^n F(x) \geq 0,$$

unde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $h = (h_1, \dots, h_n)$,

$$\begin{aligned} \Delta_{h_n}^n F(x) &\stackrel{\text{def}}{=} F(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + h_n) - F(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ \Delta_{h_{n-1}}^{n-1} \Delta_{h_n}^n F(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \Delta_{h_{n-1}}^{n-1} [F(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + h_n) - F(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)] \\ &= F(x_1, \dots, x_{n-1} + h_{n-1}, x_n + h_n) - F(x_1, \dots, x_{n-1} + h_{n-1}, x_n) \\ &\quad - F(x_1, \dots, x_{n-1} + h_{n-1}, x_n) + F(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ &\quad \dots \text{etc.}; \end{aligned}$$

(F_n2) F este continuă la stânga;

(F_n3) Dacă $x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow \infty, \dots, x_n \rightarrow \infty$, atunci $F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow 1$;

(F_n4) Dacă fixăm un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ și dacă $x_i \rightarrow -\infty$, atunci $F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow 0$.

Propoziția următoare ne furnizează o formulă de calcul asemănătoare cu cele prezentate în Propoziția 2.1.1.

Propoziția 2.1.2 Dacă $X = (X_1, \dots, X_n)$ este un vector aleator, iar F este funcția sa de repartiție, atunci

$$\begin{aligned} P(X \in [a, b]) &= P(a_1 \leq X_1 < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2, \dots, a_n \leq X_n < b_n) \\ &= P(\{a_1 \leq X_1 < b_1\} \cap \dots \cap \{a_n \leq X_n < b_n\}) = \Delta_{h_1}^1 \Delta_{h_2}^2 \cdots \Delta_{h_n}^n F(a), \end{aligned}$$

pentru orice interval $[a, b) = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$ din $\mathbf{R}^n$, unde $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $h_i = b_i - a_i$ și $a_i \leq b_i$, $\forall i = 1, \dots, n$.

2.2 Variabile și vectori aleatori continui

Definiția 2.2.1 Vom spune că X este **variabilă aleatoare continuă** dacă funcția sa de repartiție F este continuă pe $\mathbf{R}$.

Spre deosebire de variabilele aleatoare discrete care au o mulțime cel mult numărabilă de valori, variabilele continue iau, în general, toate valorile dintr-un subinterval sau dintr-o reuniune de subintervale ale dreptei reale. Exemple de astfel de variabile aleatoare: timpul de așteptare al unui tramvai într-o stație, abscisa unui punct ales la întâmplare într-un interval $[a, b]$ ($a < b$) etc.

Ne vom ocupa în continuare mai ales de acele variabile aleatoare continue a căror funcție de repartiție are proprietăți de regularitate suplimentare care să permită definirea noțiunii de densitate cât și a unor caracteristici numerice foarte utile în practică.

Definiția 2.2.2 Vom spune că o variabilă aleatoare reală X **admite densitate de probabilitate sau densitate de repartiție** dacă există o funcție $f : \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$ integrabilă Riemann, astfel încât funcția sa de repartiție F să se poată reprezenta astfel:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Funcția f se numește în acest caz **densitatea de de repartiție** a variabilei X .

Observația 2.2.1 Ținând cont că $F(\infty) = 1$, rezultă imediat că pentru orice densitate de repartiție f avem $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$.

Următoarea formulă de calcul este foarte utilă în multe probleme concrete:

Propoziția 2.2.1 Dacă variabila aleatoare reală X admite densitatea de repartiție f și dacă a și b sunt două numere reale cu $a < b$, atunci:

$$F(b) - F(a) = P(a \leq X < b) = \int_a^b f(t)dt. \quad (2.29)$$

Observația 2.2.2 Din Teorema 2.1.1 obținem pentru cazul unei variabile continue X că $P(X = x) = F(x+) - F(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ și că

$$\begin{aligned} P(a \leq X < b) &= P(a < X \leq b) = P(a < X < b) \\ &= P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a), \forall a, b \in \mathbf{R}, a \leq b. \end{aligned}$$

Dacă, în plus, X admite densitatea de repartiție f , valoarea comună a tuturor acestor probabilități mai poate fi evaluată cu formula (2.29).

De asemenea, foarte util în multe probleme este și următorul rezultat:

Propoziția 2.2.2 *Dacă variabila aleatoare reală X admite densitatea de repartiție f , atunci $F' = f$ a.p.t.*

Toate noțiunile de mai sus se pot ușor introduce și pentru vectori aleatori:

Definiția 2.2.3 *Vom spune că $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ este un vector aleator continuu dacă funcția sa de repartiție F este continuă pe $\mathbf{R}^n$.*

Dacă, în plus, există o funcție Riemann integrabilă pe $\mathbf{R}^n$, $f : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, \infty)$, astfel încât funcția de repartiție F a vectorului X să se poată reprezenta astfel:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots, dt_n, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n,$$

atunci vom spune că X admite densitatea de de repartiție f .

În mod analog, se obține și în acest context că:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots, dt_n = 1,$$

$$f = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F, \text{ dacă } F \in \mathcal{C}^n(\mathbf{R}^n),$$

și

$$\begin{aligned} P(X \in [a, b]) &= P(a_1 \leq X_1 < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2, \dots, a_n \leq X_n < b_n,) \\ &= P(\{a_1 \leq X_1 < b_1\} \cap \dots \cap \{a_n \leq X_n < b_n\}) = \Delta_{h_1}^1 \Delta_{h_2}^2 \dots \Delta_{h_n}^n F(a) \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots, dt_n, \end{aligned}$$

pentru orice interval $[a, b) = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$ din $\mathbf{R}^n$, unde $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $h = (h_1, \dots, h_n)$, $h_i = b_i - a_i$ și $a_i \leq b_i$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Dacă funcția de repartiție asociată vectorului $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ este continuă, vom spune că X este un **vector aleator n dimensional continuu**. În situațiile în care funcția de repartiție F asociată unui vector aleator $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ are proprietăți de regularitate suplimentare (i.e. admite derivate parțiale continue etc.) putem introduce, la fel ca și în cazul unidimensional, noțiunea de densitate n -dimensională:

Definiția 2.2.4 Fie $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vector aleator a cărui funcție de repartiție $F \in \mathcal{C}^n(\mathbf{R}^n)$ (i.e. F admite derivate parțiale de ordin n continue). Atunci următoarea derivată parțială de ordin n

$$f(x) = \frac{d^n F}{dx_1 dx_2 \cdots dx_n}(x), (\forall) x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \quad (2.30)$$

poartă numele de **densitatea de repartiție** a vectorului X .

2.2.1 Variabile Aleatoare Independente

Fie câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ și variabilele aleatoare X, Y .

Definiția 2.2.5 Vom spune că variabilele aleatoare X și Y sunt independente dacă

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y), \quad (2.31)$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$.

Observația 2.2.3 Cu alte cuvinte, variabilele aleatoare X, Y sunt independente dacă

$$F_Z(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y), \forall x, y \in \mathbf{R}, \quad (2.32)$$

unde F_Z este funcția de repartiție a vectorului aleator bidimensional $Z = (X, Y)$, iar F_X, F_Y sunt funcțiile de repartiție ale variabilelor aleatoare X , respectiv Y .

Propoziția 2.2.3 Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. variabilele aleatoare X și Y sunt independente;
2. pentru orice a, b, c, d numere reale avem

$$P(a \leq X < b, c \leq Y < d) = P(a \leq X < b) \cdot P(c \leq Y < d); \quad (2.33)$$

3. pentru orice intervale $J_1, J_2 \subseteq \mathbf{R}$ avem:

$$P(X \in J_1, Y \in J_2) = P(X \in J_1) \cdot P(Y \in J_2). \quad (2.34)$$

Fie acum X, Y variabile discrete cu tablourile de repartiție

$$X \left(\begin{matrix} x_i \\ p_i^X \end{matrix} \right)_{i \in J_1}, \text{ respectiv } Y \left(\begin{matrix} y_j \\ p_j^Y \end{matrix} \right)_{j \in J_2}, \quad (2.35)$$

$J_1, J_2 \subseteq \mathbf{N}$. În acest caz, independența acestor variabile se mai poate caracteriza astfel:

Propoziția 2.2.4 Variabilele aleatoare X, Y sunt independente dacă și numai dacă

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) = p_i^X \cdot p_j^Y, \forall (i, j) \in J_1 \times J_2. \quad (2.36)$$

Exemplul 2.2.1 În particular, din propoziția anterioară rezultă că variabilele aleatoare simple φ_A și φ_B sunt independente dacă și numai dacă evenimentele A și B sunt independente.

Observația 2.2.4 Dacă X, Y sunt variabile aleatoare discrete cu tablourile de repartiție de mai sus, atunci putem ușor determina tablourile de repartiție ale variabilelor $X + Y$, $X \cdot Y$, $X - Y$, $X^m \cdot Y^n$ ($m, n \in \mathcal{N}$), $\alpha X + \beta Y$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$) etc. De exemplu, pentru $\alpha X + \beta Y$ și $X \cdot Y$ vom aplica formulele:

$$\begin{aligned} P(\alpha X + \beta Y = t) &= \sum_{\alpha x_i + \beta y_j = t} P(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \sum_{\alpha x_i + \beta y_j = t} P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j), \\ P(X \cdot Y = u) &= \sum_{x_i \cdot y_j = u} P(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \sum_{x_i \cdot y_j = u} P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) \end{aligned}$$

unde sumarea se face după toate perechile de valori (x_i, y_j) pentru care $\alpha x_i + \beta y_j = t$, respectiv $x_i \cdot y_j = u$.

Exemplul 2.2.2 Fie X, Y două variabile aleatoare independente cu tablourile de repartiție

$$X \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad Y \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Valorile variabilei $X + Y$ sunt $\{-1, 0, 1, 2\}$. Pentru aceste valori avem:

$$P(X + Y = -1) = P(X = -1, Y = 0) = P(X = -1)P(Y = 0) = \frac{1}{5} \frac{3}{4} = \frac{3}{20},$$

$$P(X + Y = 0) = P(\{X = -1, Y = 1\} \cup \{X = 0, Y = 0\}) =$$

$$P(X = -1)P(Y = 1) + P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{1}{5} \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \frac{3}{4} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2},$$

$$P(X + Y = 1) = P(\{X = 0, Y = 1\} \cup \{X = 1, Y = 0\}) =$$

$$P(X = 0)P(Y = 1) + P(X = 1)P(Y = 0) = \frac{3}{5} \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10},$$

$$P(X + Y = 2) = P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1) = \frac{1}{5} \frac{1}{4} = \frac{1}{20},$$

și deci tabloul de repartiție al variabilei $X + Y$ este

$$X + Y \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{3}{20} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}.$$

În situațiile mai complicate, faptul că suma probabilităților dintr-un tablou de repartiție este 1 ne poate ajuta la determinarea mai rapidă a ultimei probabilități de calculat din acel tablou.

În mod analog se poate defini noțiunea de independență și pentru mai multe variabile aleatoare.

Definiția 2.2.6 Vom spune că variabilele aleatoare $X_1, \dots, X_n$ sunt independente dacă

$$P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n) = P(X_1 < x_1) \cdot P(X_2 < x_2) \cdots P(X_n < x_n), \quad (2.37)$$

oricare ar fi $x_1, \dots, x_n$ numere reale.

Definiția 2.2.7 Vom spune că variabilele aleatoare $X_1, \dots, X_n$ sunt independente k luate câte k dacă pentru orice $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ variabilele aleatoare $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$ sunt independente.

Teorema 2.2.1 Dacă X și Y sunt variabile aleatoare independente și $\varphi, \psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sunt continue, atunci $\varphi(X)$ și $\psi(Y)$ sunt variabile aleatoare independente.

De menționat că reciproca nu este, în general, adevărată. Teorema anterioară poate fi ușor generalizată la cazul a n variabile aleatoare independente.

În cazurile în care, pe lângă independență, avem și o repartiție comună, vom utiliza:

Definiția 2.2.8 Vom spune că variabilele aleatoare $X_1, \dots, X_n$ sunt **i.i.d.**, dacă ele sunt independente și identic distribuite.

2.3 Caracteristici numerice asociate variabilelor aleatoare.

Prezentăm în continuare o serie de caracteristici numerice ce se pot asocia unei variabile aleatoare în scopul de a sintetiza informațiile cu privire la ea.

2.3.1 Medii și momente pentru variabile discrete

Fie X o variabilă aleatoare discretă având tabloul de repartiție

$$X \left(\begin{array}{c} x_i \\ p_i \end{array} \right)_{i \in J}, \quad (J \subseteq \mathbf{N}). \quad (2.38)$$

Dacă J este o mulțime cu o infinitate de elemente, vom presupune în cele ce urmează că:

$$\sum_{i \in J} |x_i| \cdot p_i < \infty. \quad (2.39)$$

Definiția 2.3.1 Dacă X o variabilă aleatoare discretă ce verifică condițiile de mai sus, vom spune că X **admite medie** (sau că X **are medie finită**), iar numărul real

$$M(X) = \sum_{i \in J} x_i \cdot p_i, \quad (2.40)$$

îl vom numi **media** (sau **valoarea medie** a) variabilei aleatoare X .

Observația 2.3.1 Pentru valoarea medie a lui X se mai folosesc notațiile $\mu(X)$, μ_X sau $\int_{\Omega} X dP$.

Următoarele propoziții ne dau câteva formule foarte utile pentru determinarea valorii medii a unor variabile aleatoare obținute pe baza unor transformări continue.

Propoziția 2.3.1 Fie X o variabilă aleatoare discretă, având tabloul de repartiție (2.38) și fie $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă, cu proprietatea că

$$\sum_{i \in J} |h(x_i)| \cdot p_i < \infty. \quad (2.41)$$

Atunci funcția compusă $U = h(X)$ este o nouă variabilă aleatoare reală discretă, care admite medie. Valoarea medie a variabilei U se evaluează cu formula

$$M(U) = \sum_{i \in I} h(x_i) \cdot p_i. \quad (2.42)$$

Propoziția 2.3.2 Fie X, Y două variabile aleatoare discrete cu tablourile de repartiție

$$X \left(\begin{matrix} x_i \\ p_i^X \end{matrix} \right)_{i \in J_1}, \text{ respectiv } Y \left(\begin{matrix} y_j \\ p_j^Y \end{matrix} \right)_{j \in J_2}, \quad (J_1, J_2 \subseteq \mathbf{N}), \quad (2.43)$$

și fie

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \quad \forall (i, j) \in J_1 \times J_2. \quad (2.44)$$

Dacă $\tilde{h} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcție continuă cu proprietatea că

$$\sum_{i \in J_1, j \in J_2} |h(x_i, y_j)| \cdot p_{ij} < \infty, \quad (2.45)$$

atunci variabila aleatoare discretă $\tilde{U} = \tilde{h}(X, Y)$ are medie finită, dată prin:

$$M(\tilde{U}) = \sum_{i \in J_1, j \in J_2} h(x_i, y_j) \cdot p_{ij}. \quad (2.46)$$

Dacă în propoziția anterioară particularizăm $\tilde{h}(x, y) = x + y$ sau $\tilde{h}(x, y) = x \cdot y$ etc. se obțin formule de calcul pentru $M(X + Y)$, $M(X \cdot Y)$ etc.

Pentru orice $r \in \mathbf{N}$ și orice $a \in \mathbf{R}$ definim funcțiile $h_r, h_{r,a} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ prin:

$$h_r(x) = x^r, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad (2.47)$$

$$h_{r,a}(x) = (x - a)^r, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad (2.48)$$

Definiția 2.3.2 Dacă variabila aleatoare discretă X are medie finită și dacă funcțiile $h_r, h_{r,M(X)}$ verifică condițiile din Propoziția 2.3.1, atunci

- **momentul de ordin r al variabilei aleatoare X este numărul real**

$$\mu'_r(X) = M(X^r) = \sum_{i \in J} x_i^r \cdot p_i. \quad (2.49)$$

Se mai folosesc notațiile $M_r(X)$, $\alpha_r(X)$.

- **momentul absolut de ordin r al variabilei aleatoare X este numărul real**

$$\nu_r(X) = M(|X|^r) = \sum_{i \in J} |x_i|^r \cdot p_i. \quad (2.50)$$

Se mai folosesc notațiile $\overline{M}_r(X)$, $\beta_r(X)$.

- **momentul centrat de ordin r al variabilei aleatoare X este numărul real**

$$\mu_r(X) = M((X - M(X))^r) = \sum_{i \in J} (x_i - M(X))^r \cdot p_i \quad (2.51)$$

Dăm în continuare proprietățile fundamentale ale valorii medii pentru variabile discrete:

Teorema 2.3.1 *Fie X, Y variabile aleatoare discrete de medii finite. Atunci:*

1. *pentru orice $a \in \mathbf{R}$, $M(a \cdot X) = a \cdot M(X)$;*
2. *$M(X + Y) = M(X) + M(Y)$, adică operatorul de medie este liniar*
3. *Dacă $X \geq Y$ a.s., atunci $M(X) \geq M(Y)$;*
4. *Dacă $X = a$ a.s., atunci $M(X) = a$;*

Observația 2.3.2 Primele două proprietăți din teorema precedentă mai sunt cunoscute sub denumirea de *proprietatea de liniaritate a operatorului de medie*, iar a treia proprietate mai poartă numele de *proprietatea de monotonie a operatorului de medie*.

Independența variabilelor aleatoare poate aduce simplificări importante în calculul mediei unui produs de variabile aleatoare sau în calculul dispersiei unei sume de variabile aleatoare, așa după cum se poate vedea în propozițiile următoare.

Teorema 2.3.2 *Dacă X și Y sunt variabile aleatoare discrete, independente și care au medie finită, atunci*

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y). \quad (2.52)$$

Observația 2.3.3 Reciproca propoziției anterioare nu este adevărată, adică există variabile aleatoare X, Y de medii finite care satisfac relația (2.52) fără ca ele să fie independente.

2.3.2 Medii și momente pentru variabile continue

Dacă X este acum o variabilă aleatoare reală continuă având densitatea de repartiție f , vom presupune în cele ce urmează că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f(x) dx < \infty. \quad (2.53)$$

Definiția 2.3.3 *Dacă X o variabilă aleatoare continuă ce verifică condițiile de mai sus, atunci numărul*

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \quad (2.54)$$

2.3. CARACTERISTICI NUMERICE ASOCIATE VARIABILELOR ALEATOARE.77

poartă numele de **media** (sau **valoarea medie** a) variabilei aleatoare X . Se mai utilizează notațiile $E(X)$, $\int_{\Omega} X dP$.

Pentru variabilele transformate au loc rezultate similare cu cele prezentate în cazul discret.

Propoziția 2.3.3 Fie X o variabilă aleatoare reală continuă având densitatea de repartiție f și $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)| \cdot f(x) dx < \infty. \quad (2.55)$$

Atunci $U = h(X)$ este o nouă variabilă aleatoare reală de medie finită, dată prin:

$$M(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \cdot f(x) dx. \quad (2.56)$$

Propoziția 2.3.4 Fie $Z = (X, Y)$ un vector aleator bidimensional, continuu, care admite densitatea de repartiție $f(x, y)$. Dacă $\tilde{h} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcție continuă cu proprietatea că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{h}(x, y)| \cdot f(x, y) dx dy < \infty, \quad (2.57)$$

atunci $\tilde{U} = \tilde{h}(X)$ este o nouă variabilă aleatoare reală de medie finită, dată prin:

$$M(\tilde{U}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(x, y) \cdot f(x, y) dx dy. \quad (2.58)$$

Definiția 2.3.4 Dacă variabila aleatoare continuă X are medie finită și dacă funcțiile h_r , $h_{r,M(X)}$ definite în (2.47) și (2.48), verifică condițiile din Propoziția 2.3.3, atunci

- **momentul de ordin r** al variabilei aleatoare X este numărul real

$$\mu'_r(X) = M(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \cdot f(x) dx \quad (2.59)$$

Se mai folosesc notațiile $M_r(X)$, $\alpha_r(X)$.

- **momentul absolut de ordin r** al variabilei aleatoare X este numărul real

$$\nu'_r(X) = M(|X|^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r \cdot f(x) dx \quad (2.60)$$

Se mai folosesc notațiile $\overline{M}_r(X)$, $\beta_r(X)$.

- **momentul centrat de ordin r al variabilei aleatoare X este numărul real**

$$\mu_r(X) = M((X - M(X))^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^r \cdot f(x) dx \quad (2.61)$$

Rezultate similare cu cele prezentate în Teoremele 2.3.1 și 2.3.2 au loc și pentru variabilele aleatoare continue.

Încheiem această secțiune cu o proprietate foarte simplă, dar utilă a operatorului de medie.

Propoziția 2.3.5 *Dacă X este o variabilă aleatoare nenegativă de medie zero, atunci $X = 0$ a.s.*

2.3.3 Dispersia variabilelor aleatoare.

Fie X o variabilă aleatoare reală definită pe câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$.

Definiția 2.3.5 *În cazurile în care există, momentul centrat de ordin 2 mai poartă numele de **dispersia** (sau **varianța**) variabilei aleatoare X și se notează cu $D^2(X)$ sau $Var(X)$.*

Prin urmare,

$$D^2(X) = M[X - M(X)]^2. \quad (2.62)$$

Definiția 2.3.6 *Dacă X este o variabilă aleatoare cu proprietatea că X^2 are medie finită, vom spune că X este **de pătrat integrabil**.*

Mulțimea variabilelor aleatoare de pătrat integrabil se notează cu $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbf{R})$.

Propoziția 2.3.6 *Dacă $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbf{R})$, atunci X are medie și dispersie finită.*

Demonstrație. Rezultă imediat din inegalitățile evidente

$$|X| \leq \frac{X^2 + 1}{2},$$

$$(X - M(X))^2 \leq 2X^2 + 2M(X)^2$$

și din liniaritate și monotonia operatorului de medie. ■

Propoziția 2.3.7 (Formula de calcul a dispersiei) *Dacă variabila aleatoare X are dispersie finită, atunci $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbf{R})$ și*

$$D^2(X) = M[X - M(X)]^2 = M(X^2) - (M(X))^2. \quad (2.63)$$

2.3. CARACTERISTICI NUMERICE ASOCIATE VARIABILELOR ALEATOARE.79

Demonstrație. Faptul că $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbf{R})$ rezultă imediat din inegalitatea

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2), \forall a, b \in \mathbf{R}, \quad (2.64)$$

cu $a = X - M(X)$, $b = M(X)$. Formula propriu-zisă rezultă astfel:

$$\begin{aligned} D^2(X) &= M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2XM(X) + [M(X)]^2] = \\ &= M(X^2) - [M(X)]^2. \end{aligned}$$

■

Observația 2.3.4 Din monotonía operatorului de medie și din faptul că pătratul oricărui număr real este nenegativ, rezultă că pentru orice $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbf{R})$ avem întodeauna

$$D^2(X) \geq 0 \quad (2.65)$$

și deci

$$M(X^2) \geq M(X)^2. \quad (2.66)$$

Tinând cont de (2.65) rezultă ca are sens să vorbim despre radicalul dispersiei și avem:

Definiția 2.3.7 Dacă X este o variabilă aleatoare care are dispersie finită atunci rădăcina pătrată a dispersiei este numită **abaterea medie pătratică** (sau **ecart tip** sau **deviație standard**) și este notată cu $\sigma(X)$.

Dăm în continuare proprietățile fundamentale ale dispersiei:

Propoziția 2.3.8 Fie X, Y două variabile aleatoare de dispersii finite. Atunci:

- a) $D^2(X) = 0 \Leftrightarrow X = \text{const.}, a.s.$
- b) $D^2(aX + b) = a^2 D^2(X), (\forall) a, b \in \mathbf{R};$
- c) dacă X și Y sunt independente, atunci

$$D^2(aX + bY) = a^2 D^2(X) + b^2 D^2(Y), (\forall) a, b \in \mathbf{R}; \quad (2.67)$$

d) $D^2(X) \leq M[(X - a)^2], (\forall) a \in \mathbf{R}$, egalitatea atîngându-se dacă și numai dacă $a = M(X)$.

Formula (2.67) se poate generaliza pentru cazul în care avem mai multe variabile aleatoare în felul următor:

Propoziția 2.3.9 Dacă $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sunt independente două câte două și de dispersii finite, atunci

$$D^2\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 D^2(X_i), (\forall) a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}. \quad (2.68)$$

2.3.4 Inegalități importante în studiul variabilelor aleatoare

Fie X o variabilă aleatoare reală definită pe câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ și $0 < p < \infty$.

Definiția 2.3.8 Dacă X este o variabilă aleatoare cu proprietatea că $|X|^p$ are medie finită, vom spune că X este **p -integrabilă**.

Mulțimea variabilelor aleatoare p -integrabile se notează cu $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathbf{R})$.

Pentru orice $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathbf{R})$, vom nota

$$\|X\|_p = \left(M(|X|^p) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.69)$$

Observația 2.3.5 Dacă $p = 2$, regăsim, desigur, spațiul variabilelor aleatoare de pătrat integrabil, iar pentru $p = 1$, spațiul variabilelor aleatoare de medie finită.

Teorema 2.3.3 Dacă $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbf{R})$, atunci

$$|M(X)| \leq M(|X|). \quad (2.70)$$

Demonstrație. Evident $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbf{R}) \iff |X| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbf{R})$ și atunci inegalitatea (2.70) rezultă din aplicarea proprietății de monotonie a operatorului de medie pentru cazul variabilelor X , $-X$ și $|X|$, despre care știm că verifică inegalitățile uzuale ale modului:

$$X \leq |X| \text{ și } -X \leq |X|.$$

■

Teorema 2.3.4 (Inegalitatea lui Hölder) Fie $p, q > 1$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (se spune că p și q sunt **conjugate**). Dacă $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathbf{R})$ și $Y \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathbf{R})$, atunci $X \cdot Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbf{R})$ și

$$M(|X \cdot Y|) \leq \|X\|_p \cdot \|Y\|_q. \quad (2.71)$$

Demonstrație. Se utilizează inegalitatea lui Young:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b \geq 0, \quad (2.72)$$

care se poate demonstra simplu, folosind faptul că funcția $\ln x$ este concavă sau determinând extremele funcției $u_b : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ (b parametru real nenegativ), dată prin

$$u_b(x) := \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - bx, \quad \forall x \geq 0.$$

2.3. CARACTERISTICI NUMERICE ASOCIATE VARIABILELOR ALEATOARE.81

Aplicând (2.72), obținem:

$$|XY| \leq \frac{|X|^p}{p} + \frac{|Y|^q}{q}$$

și prin urmare $XY \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbf{R})$. Putem presupune că $\|X\|_p \cdot \|Y\|_q > 0$, căci în caz contrar cel puțin una din cele două variabile aleatoare este zero aproape sigur și deci inegalitatea se verifică în mod trivial.

Aplicând din nou (2.72) cu

$$a = \frac{|X|}{\|X\|_p} \text{ și } b = \frac{|Y|}{\|Y\|_q},$$

obținem:

$$\frac{|XY|}{\|X\|_p \|Y\|_q} \leq \frac{|X|^p}{p \|X\|_p^p} + \frac{|Y|^q}{q \|Y\|_q^q},$$

de unde, prin trecere la medie, avem

$$\frac{M(|XY|)}{\|X\|_p \|Y\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

adică tocmai inegalitatea cerută. ■

Particularizând $p = q = 2$ în Teorema 2.3.4, obținem:

Teorema 2.3.5 (Inegalitatea lui Cauchy-Schwartz) Dacă $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbf{R})$, atunci $X \cdot Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbf{R})$ și

$$\left(M(X \cdot Y) \right)^2 \leq M(X^2) \cdot M(Y^2). \quad (2.73)$$

Luând $Y = 1$ în inegalitatea Cauchy-Schwartz, se reobține inegalitatea (2.66).

O consecință imediată a inegalității lui Hölder este:

Teorema 2.3.6 (Inegalitatea lui Minkowski) Fie $p > 1$ și $X, Y \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathbf{R})$. Atunci

$$\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p. \quad (2.74)$$

Inegalitatea lui Hölder mai poate fi utilizată și pentru a stabili relațiile de incluziune dintre diferitele spații $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathbf{R})$:

Propoziția 2.3.10 Dacă $1 \leq s < r$, atunci $\mathcal{L}^r(\Omega, \mathbf{R}) \subset \mathcal{L}^s(\Omega, \mathbf{R})$ și

$$\|X\|_r \geq \|X\|_s, \quad \forall X \in \mathcal{L}^r(\Omega, \mathbf{R}).$$

Observația 2.3.6 Din rezultatele anterioare rezultă că $\|\cdot\|$ este o seminormă pe $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathbf{R})$ ($p > 1$), adică se verifică (axiomele seminormei):

- (a) $\|X\|_p \geq 0, \quad \forall X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathbf{R})$
- (b) $\|aX\|_p = |a| \cdot \|X\|_p, \quad \forall a \in \mathbf{R}, \forall X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathbf{R})$
- (c) $\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p, \quad \forall X, Y \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathbf{R}).$

Următoarea propoziție generalizează inegalitățile (2.66) și (2.70) de mai sus:

Teorema 2.3.7 (Inegalitatea lui Jensen) *Dacă X este o variabilă aleatoare iar $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcție convexă continuă astfel încât X și $g(X)$ au medii finite, atunci*

$$g(M(X)) \leq M(g(X)) \quad (2.75)$$

Prezentăm în continuare câteva inegalități foarte importante în studiul proprietăților asimptotice ale șirurilor de variabile aleatoare.

Teorema 2.3.8 (Inegalitatea lui Markov) *Fie $p > 1$ și $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathbf{R})$. Atunci*

$$P\{|X - M(X)| \geq a\} \leq \frac{M(|X - M(X)|^p)}{a^p}, \quad \forall a > 0. \quad (2.76)$$

Demonstrație. Notând $E_a = \{|X - M(X)| \geq a\}$, avem evident

$$|X - M(X)| \geq a \varphi_{E_a}$$

și prin urmare

$$|X - M(X)|^p \geq a^p \varphi_{E_a}$$

Trecând la medie, rezultă

$$M|X - M(X)|^p \geq a^p P(E_a),$$

adică tocmai inegalitatea cerută. ■

Particularizând $p = 2$ în inegalitatea lui Markov, obținem

Teorema 2.3.9 (Inegalitatea lui Cebâșev) *Dacă $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbf{R})$, atunci*

$$P\{|X - M(X)| \geq a\} \leq \frac{D^2(X)}{a^2}, \quad \forall a > 0. \quad (2.77)$$

Observația 2.3.7 Luând în inegalitatea lui Cebâșev $a = 3 \cdot \sigma(X)$, obținem că

$$P(M(X) - 3 \cdot \sigma(X) < X < M(X) + 3 \cdot \sigma(X)) \geq \frac{8}{9} \approx 0,88. \quad (2.78)$$

și prin urmare, aproximativ 88% dintre valorile variabilei aleatoare X sunt luate în intervalul $(M(X) - 3 \cdot \sigma(X), M(X) + 3 \cdot \sigma(X))$. Această proprietate este cunoscută sub numele de **regula celor trei σ** . Pentru anumite tipuri de variabile aleatoare, procentajul de mai sus poate fi mărit considerabil. De exemplu, în secțiunea consacrată repartiției normale, vom arăta că acest procentaj este de cel puțin 99%.

Teorema 2.3.10 (Inegalitatea lui Kolmogorov) *Dacă variabile aleatoare $X_1, \dots, X_n$ $n \geq 1$ sunt independente și au dispersii finite, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ are loc inegalitatea*

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k - M(S_k)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^n D^2(X_k)}{\varepsilon^2},$$

unde $S_0 = 0$, $S_k = X_1 + \dots + X_k$, $k = 1, \dots, n$.

2.4 Covarianță și Corelație.

Foarte importante în studiul gradului de dependență dintre două variabile aleatoare sunt noțiunile de covarianță și corelație pe care le vom defini mai jos. Sunt larg utilizate în construirea multor modele statistice, cum ar fi, de exemplu, cele întâlnite în cadrul regresiiilor simple și multiple sau în modelarea seriilor cronologice.

Fie X, Y două variabile aleatoare reale definite pe câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$.

Definiția 2.4.1 *Dacă $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbf{R})$, atunci covarianța variabilelor X și Y se definește prin relația:*

$$Cov(X, Y) = M\left[(X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))\right] \quad (2.79)$$

Observația 2.4.1 Să remarcăm faptul că, în condițiile definiției de mai sus, variabilele aleatoare X, Y au medii și dispersii finite, iar Teorema 2.3.5 ne arată că media prin care s-a definit covarianța are sens și, în plus, avem

$$|Cov(X, Y)| \leq \sqrt{D^2(X) \cdot D^2(Y)} \quad (2.80)$$

În practică, pentru calculul covarianței se utilizează în general formula stabilită de propoziția următoare:

Propoziția 2.4.1 (Formula de calcul a covarianței) *Dacă X și Y sunt variabile aleatoare cu dispersii finite, atunci*

$$Cov(X, Y) = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y). \quad (2.81)$$

Demonstrație. Într-adevăr, explicitând și efectuând calculele, rezultă:

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= M\left[(X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))\right] \\ &= M\left[XY - M(X) \cdot Y - M(Y) \cdot X + M(X) \cdot M(Y)\right] \\ &= M(XY) - M(X) \cdot M(Y) - M(Y) \cdot M(X) + M(X) \cdot M(Y) \\ &= M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y). \end{aligned}$$

■

Proprietățile esențiale ale covarianței sunt rezumate în propoziția următoare:

Propoziția 2.4.2 *Pentru orice X, Y și Z variabile aleatoare cu dispersii finite și pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$, avem:*

$$Cov(X, X) = D^2(X) \geq 0, \quad (2.82)$$

$$Cov(X, Y) = Cov(Y, X) \quad (2.83)$$

$$Cov(aX + bY, Z) = a \cdot Cov(X, Z) + b \cdot Cov(Y, Z) \quad (2.84)$$

$$D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y) + 2 \cdot Cov(X, Y) \quad (2.85)$$

Prin urmare, covarianța are toate proprietățile uzuale ale unui produs scalar pe spațiul $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbf{R})$.

Formula (2.85) se poate generaliza la cazul a n variabile aleatoare în felul următor:

Propoziția 2.4.3 *Dacă $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbf{R})$, atunci*

$$D^2\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot D^2(X_i) + 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n}^n a_i \cdot a_j \cdot Cov(X_i, X_j) \quad (2.86)$$

pentru orice $a_1, \dots, a_n$ numere reale.

Propoziția următoare reconfirmă faptul că între două variabile aleatoare independente nu avem nici un fel de dependență.

Propoziția 2.4.4 *Dacă X și Y sunt variabile aleatoare independente și cu dispersii finite, atunci*

$$\text{Cov}(X, Y) = 0. \quad (2.87)$$

Demonstrație. Se știe că pentru variabile independente media produsului este produsul mediilor, prin urmare, utilizând formula (2.81), se obține concluzia dorită. ■

O standardizare a gradului de dependență dintre două variabilele aleatoare se obține utilizând noțiunea de corelație pe care o vom defini mai jos.

Definiția 2.4.2 *Dacă X și Y sunt variabile aleatoare cu dispersii finite și nenule, atunci **corelația** (sau **coeficientul de corelație**) a variabilelor X și Y se definește prin relația:*

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D^2(X) \cdot D^2(Y)}} \quad (2.88)$$

Se mai utilizează notația $\text{Cor}(X, Y)$.

Propoziția 2.4.5 *Dacă X și Y sunt variabile aleatoare cu dispersii finite și nenule, atunci*

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1. \quad (2.89)$$

Demonstrația se obține imediat din inegalitatea (2.80) de mai sus.

Propoziția 2.4.6 *Dacă X este o variabilă aleatoare cu dispersia finită și nenulă și dacă $Y = a \cdot X + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$, a nenul), atunci*

$$\rho(X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } a > 0 \\ -1 & \text{dacă } a < 0 \end{cases} \quad (2.90)$$

Demonstrație. Se observă că $D^2(Y) = a^2 \cdot D^2(X)$ și $\text{Cov}(X, Y) = a \cdot D^2(X)$. Prin urmare,

$$\rho(X, Y) = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } a > 0 \\ -1 & \text{dacă } a < 0 \end{cases}. \quad (2.91)$$

■

Prin urmare, dacă corelația a două variabile aleatoare este în modul foarte aproape de 1, putem spune că între cele două variabile există o dependență foarte puternică, poate chiar de tip liniar, ceea ce se poate constata în practică pe baza unor estimări statistice concrete.

Din Propoziția 2.4.4 rezultă că dacă pentru două variabile independente X, Y corelația are sens, atunci avem de asemenea

$$\rho(X, Y) = 0. \quad (2.92)$$

Trebuie însă precizat că reciproca Propoziției 2.4.4 nu mai are loc, adică există variabile aleatoare a căror covarianță este nulă fără ca ele să fie independente.

Definiția 2.4.3 Fie X și Y două variabile aleatoare cu dispersii finite. Vom spune că X și Y sunt **necorelate** dacă $\text{Cov}(X, Y) = 0$. În caz contrar, vom spune că ele sunt **corelate**.

Din cele de mai sus rezultă că noțiunea de necorelare este diferită de noțiunea de independență.

2.5 Funcții caracteristice și funcții generatoare

Prezentăm în continuare două instrumente noi, extrem de utile în studiul variabilelor aleatoare, și anume funcțiile caracteristice și funcțiile generatoare. Cu ajutorul lor se pot determina foarte ușor diversele caracteristici numerice ale unei variabile aleatoare sau proprietățile asimptotice ale unui șir de variabile aleatoare, așa cum vom vedea în capitolul următor.

Fie X o variabilă aleatoare reală. În continuare vom folosi adesea *formula lui Euler*:

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a, \quad \forall a \in \mathbf{R},$$

unde $i = \sqrt{-1}$. Cum pentru orice t real fixat funcțiile

$$\mathbf{R} \ni x \rightarrow \cos tx$$

și

$$\mathbf{R} \ni x \rightarrow \sin tx$$

sunt continue, rezultă că funcția cu valori complexe $e^{itX} : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$, dată prin

$$e^{itX}(\omega) = \cos(t \cdot X(\omega)) + i \cdot \sin(t \cdot X(\omega)), \quad \forall \omega \in \Omega$$

este și ea o variabilă aleatoare și în plus

$$|e^{itX}| \leq 1.$$

În cele ce urmează ne interesează ”media” unei astfel de variabile aleatoare complexe și de aceea explicităm acest termen în definiția următoare:

Definiția 2.5.1 Dacă $Z = U + iV$ este o variabilă aleatoare complexă, vom spune că Z **admite medie** dacă variabile aleatoare reale U și V admit medii finite, iar numărul complex

$$M(Z) = M(U) + iM(V)$$

poartă numele de **media** variabilei complexe Z .

Având în vedere cele spuse mai sus despre variabila complexă e^{itX} , putem acum preciza ce se înțelege prin funcția caracteristică a variabilei aleatoare X :

Definiția 2.5.2 Funcția $\varphi_X : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, definită prin:

$$\varphi_X(t) := M(e^{itX}) = M(\cos(t \cdot X)) + i \cdot M(\sin(t \cdot X)), \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

se numește **funcția caracteristică** a variabilei aleatoare X .

Teorema următoare descrie proprietățile fundamentale ale funcției caracteristice:

Teorema 2.5.1 Funcția caracteristică φ_X are următoarele proprietăți:

- (1) $\varphi_X(0) = 1$ și $|\varphi_X(t)| \leq 1, \forall t \in \mathbf{R}$;
- (2) $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)} = \varphi_{-X}(t), \forall t \in \mathbf{R}$;
- (3) φ_X este o **funcție pozitiv definită**, adică

$$\sum_{k,j=1}^n \varphi_X(t_k - t_j) z_k \overline{z_j} \geq 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbf{R},$$

$$\text{și } \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbf{C};$$

- (4) φ_X este uniform continuă pe $\mathbf{R}$;
- (5) Dacă X și Y sunt variabile aleatoare independente, atunci

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t), \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Foarte util în calculul momentelor unei variabile aleatoare este rezultatul următor:

Teorema 2.5.2 Dacă $X \in \mathcal{L}^k(\Omega, \mathbf{R})$ ($k \in \mathbf{N}$), atunci φ_X este de k -ori derivabilă și

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \cdot M(X^k \cdot e^{itX}),$$

de unde, luând $t = 0$, se obține

$$M(X^k) = \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{i^k}.$$

Teorema următoare ne arată că funcția caracteristică determină în mod unic repartiția unei variabile aleatoare. Cu alte cuvinte, funcția caracteristică captează tot atâta informație despre o variabilă aleatoare ca și funcția sa de repartiție. Acest lucru scoate clar în evidență importanța și utilitatea funcțiilor caracteristice.

Teorema 2.5.3 (Formula de inversiune) *Fie X o variabilă aleatoare reală, F_X funcția sa de repartiție și φ_X funcția sa caracteristică. Atunci pentru orice numere reale a, b avem:*

$$\begin{aligned} F_X(b) - F_X(a) + \frac{1}{2} (P(X = b) - P(X = a)) \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \right) \varphi_X(t) dt. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Ca o consecință imediată se obține următoarea teoremă de unicitate:

Teorema 2.5.4 *Dacă două variabile aleatoare au aceeași funcție caracteristică, atunci ele sunt identic repartizate.*

Demonstrație. Fie X, Y cele două variabile aleatoare cu proprietatea că $\varphi_X = \varphi_Y$ și fie F_X , respectiv F_Y funcțiile lor de repartiție.

Se știe că există o mulțime cel mult numărabilă $\mathbf{D}$ astfel încât F_X și F_Y sunt continue pe $\mathbf{R} \setminus \mathbf{D}$. Prin urmare, în orice punct $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{D}$ vom avea $P(X = x) = P(Y = x) = 0$. Aplicând formula de inversiune în orice două puncte $a, b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{D}$, avem

$$\begin{aligned} F_X(b) - F_X(a) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \right) \varphi_X(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \right) \varphi_Y(t) dt = F_Y(b) - F_Y(a) \end{aligned}$$

și, deci, $F_X = F_Y$ pe $\mathbf{R} \setminus \mathbf{D}$. Cum F_X și F_Y sunt continue la stânga, iar $\mathbf{R} \setminus \mathbf{D}$ este densă în $\mathbf{R}$, obținem că X și Y au aceeași repartiție. ■

Comportamentul funcției caracteristice la transformări liniare este redat în propoziția următoare.

Propoziția 2.5.1 *Pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$,*

$$\varphi_{aX+b}(t) = \varphi_X(at)e^{ibt}, \quad \forall t \in \mathbf{R}. \quad (2.94)$$

Demonstrație. Fie $Y = aX + b$. Aplicând definiția funcției caracteristice, avem

$$\begin{aligned}\varphi_Y(t) &= M(e^{itY}) = M(e^{ibt} \cdot e^{iatX}) \\ &= e^{ibt} \cdot M(e^{iatX}) = \varphi_X(at)e^{ibt}.\end{aligned}$$

■

Fie acum X o variabilă aleatoare oarecare. Vom presupune în cele ce urmează că variabila reală transformată $e^{t \cdot X}$ admite medie finită cel puțin într-o vecinătate a lui zero.

Definiția 2.5.3 *Dacă X este o variabilă aleatoare reală, atunci funcția reală $m_X(t) = M(e^{t \cdot X})$, definită pentru orice număr real t pentru care media respectivă există poartă numele de **funcția generatoare** (sau **funcție generatoare de momente**) a variabilei aleatoare X .*

Funcția generatoare are proprietăți asemănătoare cu cele ale funcției caracteristice, chiar dacă ea nu poate fi definită în general pentru orice t real. Rezumăm în continuare câteva dintre aceste proprietăți.

Teorema 2.5.5 *Dacă X și Y sunt variabile aleatoare independente, cu funcțiile generatoare de momente $m_X(t)$ și respectiv $m_Y(t)$, atunci cel puțin pe o vecinătate a lui zero funcția generatoare de momente a lui $X + Y$ verifică relația:*

$$m_{X+Y} = m_X \cdot m_Y. \quad (2.95)$$

Demonstrația rezultă imediat din faptul că în ipotezele de mai sus se poate aplica teorema conform căreia media unui produs de variabile aleatoare independente este egală cu produsul mediilor.

Așa după cum îi spune și numele, determinarea momentelor unei variabile aleatoare este unul dintre atributele de bază ale funcției m_X , putându-se da în acest sens un rezultat asemănător cu cel prezentat în Teorema 2.5.2.

Teorema 2.5.6 *Dacă există $t_0 > 0$ astfel încât $X \cdot e^{t_0 X} \in \mathcal{L}^k(\Omega, \mathbf{R})$ ($k \in \mathbf{N}$), atunci m_X este de k -ori derivabilă într-o vecinătate I_0 a originii și*

$$m_X^{(k)}(t) = M(X^k \cdot e^{tX}),$$

pentru orice $t \in I_0$, de unde, luând $t = 0$, se obține

$$M(X^k) = m_X^{(k)}(0).$$

Teorema 2.5.7 *Dacă X și Y sunt două variabile aleatoare astfel încât funcțiile lor generatoare de momente $m_X(t)$ și $m_Y(t)$ coincid într-o vecinătate a lui zero, atunci X și Y au aceeași distribuție.*

Această teoremă este analoaga Teoremei 2.5.4 prezentată mai sus pentru funcții caracteristice.

Comportamentul funcției caracteristice la transformări liniare este redat în propoziția următoare.

Chiar și în privința transformărilor liniare, avem pentru funcțiile generatoare un rezultat similar cu cel prezentat în Propoziția 2.5.1.

Propoziția 2.5.2 *Dacă X este o variabilă aleatoare cu funcția generatoare de momente $m_X(t)$, atunci variabila aleatoare $Y = \alpha X + \beta$ are funcția generatoare de momente*

$$m_Y(t) = e^{\beta t} m_X(\alpha t). \quad (2.96)$$

Demonstrația se face exact la fel ca în cazul Propoziției 2.5.1.

2.6 Exerciții și probleme

1. Fie X o variabilă aleatoare cu repartiția

$$X : \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine repartițiile variabilelor aleatoare $Y = X^2 + 1$ și $Z = (X - 1)^2$.

2. Într-o urnă sunt 100 de lozuri, fiecare fiind inscripționat cu un număr care reprezintă suma (în euro) pe care o câștigă persoana care îl extrage. 75 de lozuri poartă cifra 0, 20 de lozuri cifra 1, 4 lozuri cifra 5, iar 1 loz cifra 20. Se face o singură extragere. Notăm cu X variabila aleatoare care reprezintă suma câștigată în euro. Să se determine tabloul de repartiție a lui X și funcția sa de repartiție.
3. Fie X și Y variabile aleatoare independente, cu repartițiile:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Să se determine repartițiile variabilelor aleatoare: $X + Y$; $X - Y$; $X \cdot Y$; $X^2 - Y^2$.

4. Variabilele independente X, Y au repartițiile:

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine repartiția lui $Z = \min(X, Y)$, precum și repartiția maximumului, corelația lui X cu Y , covarianța lui X cu Y .

5. Fie $X_1, \dots, X_n$ variabile aleatoare independente identic repartizate cu $P(X_i = k) = \frac{1}{N}$, $k = 1, \dots, N$, $i = 1, \dots, n$. Să se afle repartiția variabilelor aleatoare
- $Z_p = \max(X_1^p, \dots, X_n^p)$, $p \in \{1, 2\}$;
 - $Y_p = \min(X_1^p, \dots, X_n^p)$, $p \in \{1, 2\}$.

6. Se aruncă n monezi. Fie X numărul total de steme care apar. Să se calculeze media și dispersia lui X .

7. Cu ocazia aniversării a 20 ani de la înființarea unei firme, se organizează un concurs în urma căruia se vor repartiza în mod aleator n monezi de aur la cei m angajați ai firmei. Astfel, fiecărui angajat i se asociază un număr de la 1 la m , numerele de la 1 la m sunt trecute fiecare pe câte un bilețel, iar cele m bilețele astfel rezultate se pun într-o urnă și se amestecă. Extragerile din urnă se fac cu revenire, la fiecare extragere se dă câte o monedă angajatului corespunzător numărului extras. Definim următoarele variabile aleatoare:

U_i = variabila aleatoare care dă numărul de monezi primite de angajatul cu numărul i

V = variabila aleatoare care dă numărul de monezi primite de r angajați specificați

X = variabila aleatoare care dă numărul de angajați care nu primesc nimic

Y = variabila aleatoare care dă numărul de angajați care primesc cel puțin 2 monede.

Se cer:

- Repartițiile variabilelor aleatoare U_i și V .
 - Mediile și dispersiile variabilelor aleatoare U_i și V .
 - Mediile variabilelor aleatoare X și Y .
 - În cazul în care $m = 3$, să se determine explicit tabloul de repartiție al lui X .
8. Presupunem că variabila aleatoare X are valorile $-1, 0, 1$ și că $P(X = 1) = p$, iar $M(X) = m$. Să se determine repartiția lui X ($m \leq p \leq 1 + m$).
9. Fie X și Y două variabile aleatoare identic repartizate, având repartiția comună $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Să se determine repartiția variabilei aleatoare $X + Y$, precum și dispersia ei.

10. Între un magazin și o fabrică se încheie un contract care prevede ca fabrica să asigure zilnic un lot de n articole, iar pentru controlul calității magazinul să aibă voie să aleagă un singur articol din fiecare lot sosit; dacă se constată că acel articol e defect, atunci fabrica va plăti magazinului o sumă de bani S . Fie X variabila aleatoare care dă numărul de zile care au trecut până când fabrica a plătit pentru prima dată suma S . Știind că proporția de produse defecte din fiecare lot adus zilnic la magazin este q , $q \in (0, 1)$, să se determine:
- Repartiția lui X
 - Media și dispersia lui X .
11. Fie X o variabilă aleatoare nenegativă și de medie finită. Arătați că

$$M(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n).$$

12. Se consideră două evenimente A, B pentru care $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = p$, $P(A|B) = \frac{1}{4}$ și variabilele aleatoare X, Y definite prin:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{dacă } A \text{ se realizează} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & \text{dacă } B \text{ se realizează} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- Să se determine $M(X)$, $M(Y)$ și corelația dintre X și Y ;
 - Pentru ce valori ale lui p sunt X, Y independente?
13. Să se determine valoarea medie și dispersia variabilelor aleatoare $Y = |\sin X|$, $Z = \sin^2 X$, unde X are densitatea de repartiție $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
14. Dacă X are densitatea de repartiție

$$f(x) = \begin{cases} a, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

să se determine constanta pozitivă a și să se calculeze densitățile de repartiție ale variabilelor aleatoare cX ($c > 0$), X^α ($\alpha > 0$), $\ln X$, e^X .

15. Să se determine constanta k astfel încât $f(x) = ke^{-|x|}$, $x \in \mathbf{R}$ să fie o densitate de repartiție.
16. Pentru ce valori ale parametrilor α și β este funcția următoare

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}(e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}) & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

o densitate de repartiție?

17. Pentru ce valoare a constantei c este funcția

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x) & \text{pentru } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

o densitate de repartiție? Calculați valoarea medie și varianța acestei repartiții.

18. Pentru ce valoare a constantei c este funcția

$$f(x) = \frac{c}{\alpha^2 + (x - \beta)^2}, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

cu parametrii $\alpha > 0$ și $\beta \in \mathbf{R}$ o densitate de repartiție? Admite această repartiție valoarea medie?

19. Considerăm funcția

$$f(t) = \begin{cases} ct(2-t) & \text{pentru } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

- 1). Pentru ce valoare a parametrului c este f o densitate de repartiție?
- 2). Calculați mediile variabilelor aleatoare $Y_1 = \max(X, 1)$, $Y_2 = \min(X, 1)$, dacă repartiția variabilei aleatoare X are densitatea de repartiție f de la punctul 1).

20. Fie X o variabilă aleatoare nenegativă astfel încât X are moment de ordin α ($\alpha \geq 1$) finit. Dacă F este funcția ei de repartiție, arătați că:

$$M(X^\alpha) = \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1}(1-F(x))dx.$$

21. Dacă $X_1, X_2, \dots, X_n$ sunt i.i.d. astfel încât

$$X_i \left(\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right), \quad \forall i \geq 1,$$

să se calculeze funcția caracteristică și funcția generatoare de momente a variabilei aleatoare $X_1 + \dots + X_n$.

22. Considerăm că venitul mediu lunar al unei familii într-o țară este o variabilă aleatoare cu media 1000 (unități monetare) și abaterea standard de 200 (unități monetare).

Care este probabilitatea minimă ca, alegând întâmplător 16 familii, venitul mediu pe familie să nu devieze cu mai mult de 100 de unități monetare de la medie?

23. Considerăm că durata de ardere a becurilor este o variabilă aleatoare cu media de 1000 de ore și cu abaterea standard de 150 de ore. Determinați o probabilitate minimă ca durata de ardere a unui bec ales la întâmplare să varieze cu mai puțin de 225 de ore de la valoarea medie de bază.

Capitolul 3

Repartiții de probabilitate și proprietăți asimptotice ale șirurilor de variabile aleatoare

În prima parte a acestui capitol vom pune în evidență câteva repartiții clasice de probabilitate frecvent folosite în statistica matematică, iar în partea a doua, rezultatele fundamentale ale teoriei probabilităților.

3.1 Repartiții discrete

3.1.1 Repartiția binomială

Definiția 3.1.1 Spunem că variabila aleatoare X are o **repartiție binomială** de parametri n și p ($n \in \mathbf{N}$, $0 \leq p \leq 1$), dacă X ia valorile $0, 1, \dots, n$ cu probabilitățile

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (\forall) k \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad (3.1)$$

unde $q = 1 - p$. Vom nota în acest caz $X \sim Bi(n, p)$.

Se mai utilizează denumirea de **repartiție Bernoulli**.

Observația 3.1.1 Cu alte cuvinte, $X \sim Bi(n, p)$ dacă și numai dacă X este o variabilă aleatoare simplă cu tabloul de repartiție

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ q^n & npq^{n-1} & \dots & C_n^k p^k q^{n-k} & \dots & p^n \dots \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Denumirea acestei repartiții provine, evident, de la schema clasică cu același nume, pe baza căreia a fost construită.

Propoziția 3.1.1 Dacă în cadrul unei experiențe aleatoare avem n evenimente independente, $A_1, A_2, \dots, A_n$, toate cu aceeași probabilitate de realizare p (adică $P(A_i) = p$, $i = 1, 2, \dots, n$), atunci variabila aleatoare X care ne dă numărul de evenimente care s-au realizat în urma efectuării experienței are o repartiție binominală de parametri n și p .

Demonstrația rezultă foarte ușor aplicând schema lui Bernoulli.

Dăm acum două consecințe imediate ale Propoziției 3.1.1, foarte utile în multe probleme.

Propoziția 3.1.2 Fie $\mathcal{E}$ o experiență aleatoare și A un eveniment asociat ei, cu probabilitatea de realizare p . Atunci numărul X de realizări ale lui A pe parcursul a n repetări independente ale experienței aleatoare $\mathcal{E}$ este o variabilă aleatoare repartizată binominal cu parametri n și p .

Propoziția 3.1.3 Dacă $X_1, X_2, \dots, X_n$ sunt n variabile aleatoare independente și identic distribuite, cu tabloul de repartiție comun

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

atunci $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim Bi(n, p)$.

Demonstrație. Se aplică Propoziția 3.1.1 pentru

$$A_i = \{X_i = 1\}, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

■

Propoziția 3.1.4 Dacă $X \sim Bi(n, p)$, atunci:

$$M(X) = np, \quad D^2(X) = npq, \quad (3.5)$$

unde $q = 1 - p$.

Demonstrație. Fiind vorba despre o repartiție importantă, vom da mai multe variante de demonstrare.

Varianta 1. X fiind variabilă discretă, avem

$$M(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = np \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \cdot C_n^k p^{k-1} q^{n-k} \quad (3.6)$$

Dar

$$\frac{k}{n} \cdot C_n^k = C_{n-1}^{k-1} \quad (3.7)$$

și deci

$$M(X) = np \sum_{k=0}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} = np. \quad (3.8)$$

Analog,

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \sum_{k=0}^n k^2 \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = np \sum_{k=0}^n k \frac{k}{n} \cdot C_n^k p^{k-1} q^{n-k} = \\ &= np \sum_{k=0}^n k C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np \sum_{k=0}^n (k-1) C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} + \\ &\quad + np \sum_{k=0}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np(n-1)p + np, \end{aligned}$$

deoarece penultima sumă reprezintă media unei variabile aleatoare repartizată $Bi(n-1, p)$ iar ultima sumă este

$$\sum_{k=0}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = (p+q)^{n-1} = 1.$$

Prin urmare

$$M(X^2) = np(n-1)p + np \quad (3.9)$$

și deci

$$D^2(X) = M(X^2) - M^2(X) = npq \quad (3.10)$$

Varianta 2. Se poate utiliza tehnica obținerii identităților combinatoriale prin derivări de polinoame. Considerând polinomul $L(x) = (px + q)^n$ și dezvoltându-l cu ajutorul binomului lui Newton, avem:

$$L(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k x^k q^{n-k}, \quad (\forall) x \in \mathbf{R} \quad (3.11)$$

Folosind aceste două explicitări ale lui L , prin derivări succesive se pot calcula diversele momente ale lui X , și anume:

$$\frac{dL}{dx} \Big|_{x=1} = M(X)$$

și

$$\frac{d}{dx} \left(x \cdot \frac{dL}{dx} \right) \Big|_{x=1} = M(X^2).$$

De aici, dispersia se evaluează la fel ca în varianta 1.

Varianta 3. Cu notațiile din Propoziția 3.1.3, rezultă că X și $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ au aceeași medie și aceeași dispersie, deoarece sunt două variabile aleatoare identic repartizate. Prin urmare,

$$M(X) = M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)$$

și

$$D^2(X) = D^2(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D^2(X_1) + D^2(X_2) + \dots + D^2(X_n),$$

pentru că $X_1, X_2, \dots, X_n$ sunt independente. Având în vedere tabloul de repartiție comun (3.3) al acestor variabile simple, rezultă că

$$M(X_i) = p, \quad D^2(X_i) = pq, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

și înlocuind în formulele de mai sus obținem valorile căutate. ■

În propoziția următoare evaluăm funcția generatoare și funcția caracteristică pentru o variabilă repartizată binomial.

Propoziția 3.1.5 *Dacă $X \sim Bi(n, p)$, atunci*

$$m_X(t) = M(e^{tX}) = (p \cdot e^t + q)^n, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad (3.12)$$

$$\varphi_X(t) = M(e^{itX}) = (p \cdot e^{it} + q)^n, \quad \forall t \in \mathbf{R}. \quad (3.13)$$

Demonstrație. Variabilele aleatoare e^{tX} , e^{itX} fiind simple, mediile lor se calculează cu formula uzuală:

$$\begin{aligned} M(e^{tX}) &= \sum_{k=0}^n e^{tk} \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot (e^t \cdot p)^k q^{n-k} \\ &= (e^t \cdot p + q)^n. \end{aligned}$$

Analog se evaluează și funcția caracteristică. ■

Teorema 3.1.1 *Dacă X_1, X_2 sunt variabile aleatoare independente și dacă $X_1 \sim Bi(n_1, p)$ și $X_2 \sim Bi(n_2, p)$, atunci $X_1 + X_2 \sim Bi(n_1 + n_2, p)$.*

Demonstrație. *Varianta 1.* Folosind formula combinatorială

$$\sum_{j=0}^k C_{n_1}^j \cdot C_{n_2}^{k-j} = C_{n_1+n_2}^k, \quad (3.14)$$

avem

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = k) &= \sum_{j=0}^k P(X_1 = j, X_2 = k - j) = \\ &= \left(\sum_{j=0}^k C_{n_1}^j \cdot C_{n_2}^{k-j} \right) p^k q^{m+n-k} = C_{n_1+n_2}^k p^k q^{m+n-k}, \end{aligned}$$

pentru orice $k = 0, \dots, n_1 + n_2$, ceea ce implică $X_1 + X_2 \sim Bi(n_1 + n_2, p)$.

Reamintim că identitatea (3.14) poate fi demonstrată prin inducție sau se poate obține egalând coeficientul lui x^k din dezvoltările $(1+x)^{n_1} \cdot (1+x)^{n_2}$ și $(1+x)^{n_1+n_2}$.

Varianta 2. Rezultă ușor aplicând Teoremele 2.5.1 și 2.5.4 (sau Teoremele 2.5.5 și 2.5.7). Ținând cont de Propoziția 3.1.5 de mai sus, avem

$$\begin{aligned} \varphi_{X_1+X_2}(t) &= \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) = (p \cdot e^{it} + q)_1^n \cdot (p \cdot e^{it} + q)_2^n \\ &= (p \cdot e^{it} + q)^{n_1+n_2}, \quad \forall t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Prin urmare, $X_1 + X_2$ are aceeași funcție caracteristică pe care o are și o variabilă repartizată $Bi(n_1 + n_2, p)$, deci în mod necesar trebuie să avem $X_1 + X_2 \sim Bi(n_1 + n_2, p)$. ■

3.1.2 Repartiția Poisson

Definiția 3.1.2 Spunem că variabila aleatoare X este **repartizată Poisson** de parametru λ , dacă X ia valorile $0, 1, \dots, n, \dots$, cu probabilitățile

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (\forall) k \in \mathbf{N}. \quad (3.15)$$

Notăm în acest caz $X \sim Po(\lambda)$.

Observația 3.1.2 Cu alte cuvinte, $X \sim Po(\lambda)$ dacă și numai dacă X este o variabilă aleatoare simplă cu tabloul de repartiție

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n & \dots \\ e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} & \dots \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Distribuția Poisson mai poartă numele și de **legea evenimentelor rare** și se mai notează cu π_λ .

Repartiția Poisson este des utilizată pentru aproximarea repartiției binomiale în situațiile în care n este foarte mare. Mai precis, are loc următoarea:

Teorema 3.1.2 (Poisson, 1837) *Dacă $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este un șir de numere reale din $[0, 1]$ și dacă*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot p_n = \lambda,$$

atunci, pentru $k \in \mathbf{N}$ fixat, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k q^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (3.17)$$

Să calculăm acum, pentru repartiția Poisson, funcția caracteristică și funcția generatoare de momente.

Propoziția 3.1.6 *Dacă $X \sim Po(\lambda)$, atunci*

$$m_X(t) = M(e^{tX}) = e^{\lambda(e^t-1)}, \forall t \in \mathbf{R}, \quad (3.18)$$

$$\varphi_X(t) = M(e^{itX}) = e^{\lambda(e^{it}-1)}, \forall t \in \mathbf{R}. \quad (3.19)$$

Demonstrație. Ținând seama de dezvoltarea în serie a funcției exponențiale

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\theta^r}{r!} \right) = e^{\theta}, \forall \theta \in \mathbf{R},$$

avem:

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \left(\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \right) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}, \forall t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

În mod analog se determină și funcția caracteristică. ■

Caracteristicile numerice de bază ale repartiției Poisson sunt stabilite în propoziția următoare:

Propoziția 3.1.7 *Dacă $X \sim Po(\lambda)$, atunci*

$$M(X) = D^2(X) = \lambda. \quad (3.20)$$

Demonstrație. Dăm și aici două variante de soluționare:

Varianta 1. Cum X este o variabilă discretă, avem:

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda, \quad (3.21)$$

deoarece

$$e^{\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (3.22)$$

Pentru calculul lui $M(X^2)$ vom proceda la fel ca în cazul repartiției binomiale:

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\ &= \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$D^2(X) = M(X^2) - M^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \quad (3.23)$$

Varianta 2. Am văzut în Propoziția 3.1.6 că $m_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$, $\forall t \in \mathbf{R}$. Prin urmare, putem determina momentele repartiției Poisson calculând derivatele acestei funcții în zero:

$$M(X) = \frac{d}{dt} m_X(t)|_{t=0} = e^{\lambda(e^t-1)} \lambda e^t|_{t=0} = \lambda, \quad (3.24)$$

$$M(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} m_X(t)|_{t=0} = e^{\lambda(e^t-1)} \lambda e^t + e^{\lambda(e^t-1)} \lambda^2 e^{2t}|_{t=0} = \lambda^2 + \lambda, \quad (3.25)$$

de unde, la fel ca mai sus, deducem $D^2(X) = \lambda$. ■

Teorema 3.1.3 Dacă X_1, X_2 sunt variabile aleatoare independente și dacă $X_1 \sim Po(\lambda_1)$ și $X_2 \sim Po(\lambda_2)$, atunci $X_1 + X_2 \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Demonstrație. Pentru orice k număr natural, avem:

$$\begin{aligned}
 P(X_1 + X_2 = k) &= \sum_{j=0}^k P(X_1 = j, X_2 = k - j) \\
 &= \sum_{j=0}^k P(X_1 = j) \cdot P(X_2 = k - j) = \sum_{j=0}^k \frac{\lambda_1^j}{j!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\lambda_2} \\
 &= \frac{e^{(\lambda_1 + \lambda_2)}}{k!} \sum_{j=0}^k C_k^j \lambda_1^j \lambda_2^{k-j} = \\
 &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)},
 \end{aligned}$$

deci într-adevăr $X_1 + X_2 \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Desigur, se poate da și o altă variantă de demonstrație, bazându-ne pe proprietățile funcției caracteristice sau funcției generatoare care au fost prezentate mai sus. ■

3.1.3 Repartiția hipergeometrică

Fie N, n două numere naturale nenule cu $n \leq N$ și fie $p \in [0, 1]$ astfel încât Np este un număr natural.

Definiția 3.1.3 Vom spune că X urmează o **repartiție hipergeometrică** de parametri N, n, p dacă:

$$P(X = k) = \frac{C_{Np}^k C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n}, \quad (3.26)$$

pentru orice k ce verifică $\max(0, n - Nq) \leq k \leq \min(n, Np)$ ($q = 1 - p$).

Notăm în acest caz $X \sim \mathcal{H}(N, n, p)$.

Observația 3.1.3 Repartiția hipergeometrică are la bază schema bilei nerevenite: considerând o urnă ce conține N bile, dintre care Np albe, iar restul negre, probabilitatea ca în urma a n extrageri fără revenire din acea urnă să obținem k bile de culoare albă este dată de formula (3.26).

Propoziția 3.1.8 Dacă $X \sim \mathcal{H}(N, n, p)$ ($N > 1$), atunci

$$\begin{aligned}
 M(X) &= np, \\
 D^2(X) &= \frac{N-n}{N-1} npq.
 \end{aligned}$$

Se poate arăta că pentru valori mari ale lui N repartiția $\mathcal{H}(N, n, p)$ se poate aproxima cu repartiția $Bi(n, p)$.

3.1.4 Repartiția geometrică

Definiția 3.1.4 Spunem că variabila aleatoare X are o **repartiție geometrică** de parametru p ($0 \leq p \leq 1$), dacă X ia valorile $0, 1, \dots$, cu probabilitățile

$$P(X = k) = pq^k, \quad (\forall) k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.27)$$

unde $q = 1 - p$. Vom nota în acest caz $X \sim \text{Geom}(p)$.

Observația 3.1.4 Cu alte cuvinte, $X \sim \text{Geom}(p)$ dacă și numai dacă X este o variabilă aleatoare discretă cu tabloul de repartiție

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots \\ p & pq & \dots & pq^k & \dots \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Denumirea acestei repartiții provine din faptul că probabilitățile de pe linia a doua a tabloului de mai sus formează o progresie geometrică de rație q .

Propoziția 3.1.9 Dacă $X \sim \text{Geom}(p)$ ($0 < p < 1$), atunci funcția generatoare de momente este:

$$m_X(t) = M(e^{tX}) = p \frac{1}{1 - qe^t}, \quad \forall t < -\ln q, \quad (3.29)$$

iar funcția caracteristică:

$$\varphi_X(t) = M(e^{itX}) = p \frac{1}{1 - qe^{it}}, \quad \forall t \in \mathbf{R}. \quad (3.30)$$

Demonstrație. Conform definiției, avem

$$m_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} pq^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (qe^t)^k = p \frac{1}{1 - qe^t},$$

pentru orice $t < -\ln q$.

Analog se procedează și pentru a calcula funcția generatoare.

■

Propoziția 3.1.10 Dacă $X \sim \text{Geom}(p)$ ($0 < p < 1$), atunci

$$M(X) = \frac{q}{p}, \quad D^2(X) = \frac{q}{p^2}. \quad (3.31)$$

Demonstrație. Vom calcula aceste caracteristici numerice cu ajutorul derivatelor funcției generatoare de momente:

$$m'_X(t) = \frac{pqe^t}{(1 - qe^t)^2}$$

și

$$m''_X(t) = \frac{pqe^t(1 - qe^t)^2 + 2p(qe^t)^2(1 - qe^t)}{(1 - qe^t)^4}$$

pentru orice $t < -\ln q$. Luând $t = 0$, avem

$$M(X) = m'_X(0) = \frac{q}{p}$$

și

$$M(X^2) = m''_X(0) = \frac{pq + 2q^2}{p^2}.$$

De aici rezultă imediat, pe baza formulei de calcul a dispersiei, că

$$D^2(X) = \frac{q}{p^2}.$$

■

3.2 Repartiții continue

3.2.1 Repartiția uniformă

Definiția 3.2.1 Vom spune că X urmează o **repartiție uniformă** pe intervalul $[a, b]$ ($a < b$) dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x).$$

Se notează $X \sim U(a, b)$.

Propoziția 3.2.1 Dacă $X \sim U(a, b)$, atunci $\frac{X-a}{b-a} \sim U(0, 1)$.

Cu alte cuvinte, se poate face o standarziare a repartițiilor uniforme, luându-se drept element de referință repartiția $U(0, 1)$.

Propoziția 3.2.2 Dacă $X \sim U(a, b)$, atunci funcția de repartiție F a variabilei aleatoare X este:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b] \\ 1, & x > b \end{cases}.$$

Demonstrație. Având în vedere formula de legătură dintre F și f , avem

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \int_a^x \frac{dt}{b-a}, & x \in (a, b] \\ \int_a^b \frac{dt}{b-a}, & x > b \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b] \\ 1, & x > b \end{cases}.$$

■

Propoziția 3.2.3 Dacă $X \sim U(a, b)$, atunci

$$M(X) = \frac{b+a}{2} \text{ și } D^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Demonstrație. Cu definițiile uzuale, avem:

$$M(X) = \int_a^b \frac{t dt}{b-a} = \frac{b+a}{2},$$

$$M(X^2) = \int_a^b \frac{t^2 dt}{b-a} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3},$$

de unde $D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$.

■

În ce privește funcția caracteristică și funcția generatoare de momente, avem următorul rezultat:

Propoziția 3.2.4 Dacă $X \sim U(a, b)$, atunci

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}, & t \neq 0 \end{cases}, \quad (3.32)$$

$$m_X(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ \frac{e^{itb} - e^{ita}}{t(b-a)}, & t \neq 0 \end{cases}. \quad (3.33)$$

Demonstrație. Fie $Y = \frac{X-a}{b-a}$. Din Propoziția 3.2.1 rezultă că $Y \sim U(0,1)$. Evaluăm mai întâi funcția caracteristică a variabilei Y :

$$\varphi_Y(t) = \int_0^1 e^{itx} dx = \frac{e^{it} - 1}{it}$$

pentru $t \neq 0$. În zero, orice funcție caracteristică are valoarea 1. Funcția caracteristică a lui X se deduce ușor aplicând formula dată în Propoziția 2.5.1. Analog se procedează pentru determinarea funcției generatoare. ■

3.2.2 Repartiția Normală

Este una dintre cele mai importante repartiții, pe ea bazându-se foarte multe analize statistice.

Definiția 3.2.2 Vom spune că o variabilă aleatoare X are o **repartiție normală** (sau **gaussiană**) de parametri m și σ , dacă X are densitatea de repartiție

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (3.34)$$

Vom nota $X \sim N(m, \sigma^2)$.

Dacă $X \sim N(0, 1)$, vom spune că X are o **repartiție normală standard** și vom nota densitatea ei cu $\phi(x)$, iar funcția sa de repartiție cu $\Phi(x)$, adică:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (3.35)$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad (\forall) x \in \mathbf{R}, \quad (3.36)$$

Funcția Φ mai poartă numele de **funcția lui Laplace**.

Referitor la noțiunile introduse în definiția de mai sus, dăm în continuare câteva proprietăți imediate.

Propoziția 3.2.5 Dacă $X \sim N(m, \sigma^2)$, atunci $\frac{X-m}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Această propoziție ne arată că este suficient să ne restrângem atenția asupra repartiției normale standard, deoarece proprietățile unei repartiții normale oarecare pot fi ușor deduse pe baza transformării pusă în evidență mai sus. Această

idee apare în multe din rezultatele de mai jos. Datorită acestui rol de referință a repartiției $N(0, 1)$, pentru funcția sa de repartiție Φ s-au întocmit tabele de valori, foarte utile atunci când avem de calculat probabilități concrete ale repartiției normale sau când efectuăm testarea anumitor ipoteze statistice bazate pe legea normală. Aceste tabele statistice cu valorile lui Φ sunt în general întocmite doar pentru valorile pozitive ale lui x , deoarece pentru aflarea celorlalte valori se poate utiliza:

Propoziția 3.2.6 *Funcția lui Laplace verifică:*

$$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1, \quad (\forall)x \in \mathbf{R}. \quad (3.37)$$

Exemplul 3.2.1 Să evaluăm cu ajutorul tabelului statistic al valorilor funcției Φ următoarele probabilități: $P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma)$, $P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma)$ și $P(m - 3\sigma \leq X \leq m + 3\sigma)$, unde $X \sim N(m, \sigma^2)$. Conform formulelor uzuale care leagă probabilitatea ca o variabilă aleatoare să ia valori într-un interval și funcția sa de repartiție, avem:

$$P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) = P(-1 \leq Y \leq 1)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0,6826$$

$$P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) = P(-2 \leq Y \leq 2)$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 0,9544$$

$$P(m - 3\sigma \leq X \leq m + 3\sigma) = P(-3 \leq Y \leq 3)$$

$$= \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 0,9974$$

unde $Y = \frac{X-m}{\sigma} \sim N(0, 1)$. Prin urmare, în cazul repartiției normale, *regula celor 3 σ* funcționează cu un procentaj de 99,74%.

Să determinăm acum funcția generatoare și funcția caracteristică pentru repartiția $X \sim N(m, \sigma^2)$.

Teorema 3.2.1 *Dacă $X \sim N(m, \sigma^2)$, atunci funcția sa generatoare de momente este*

$$m_X(t) = M(e^{tX}) = e^{mt + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}, \quad (\forall)t \in \mathbf{R}, \quad (3.38)$$

iar funcția sa caracteristică

$$\varphi_X(t) = M(e^{itX}) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}, \quad (\forall)t \in \mathbf{R}. \quad (3.39)$$

Demonstrație. Având în vedere comportamentul acestor funcții la transformări liniare, este suficient să le evaluăm în cazul repartiției normale standard. Prin urmare, vom calcula doar m_Y și φ_Y , unde

$$Y = \frac{X - m}{\sigma} \sim N(0, 1),$$

conform Propoziției 3.2.5. Cu definițiile uzuale, funcția generatoare a lui Y este

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= M(e^{tY}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tx} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2tx)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} \cdot e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) du = e^{\frac{t^2}{2}}, \quad (\forall) t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Am făcut mai sus schimbarea de variabilă $u = x - t$ și am folosit apoi faptul că ϕ este o densitate de repartiție, prin urmare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) du = 1.$$

Analog se procedează și pentru a arăta că funcția caracteristică a lui Y este $\varphi_Y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, (\forall) t \in \mathbf{R}$. ■

Teorema 3.2.2 Dacă $X \sim N(m, \sigma^2)$ atunci

$$M(X) = m, \text{ și } D^2(X) = \sigma^2. \quad (3.40)$$

Demonstrație. *Varianta 1.* Calculăm mai întâi media și dispersia variabilei aleatoare $Y = \frac{X-m}{\sigma} \sim N(0, 1)$. Avem

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} u \phi(u) du = 0,$$

pentru că ϕ este o funcție pară. Momentul de ordinul 2 este

$$M(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-u) (-u e^{-\frac{u^2}{2}}) dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-ue^{-\frac{u^2}{2}}) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) du = 1.$$

Prin urmare $M(Y) = 0$ și $D^2(Y) = 1$, de unde

$$M(X) = \sigma M(Y) + m = m,$$

$$D^2(X) = \sigma^2 D^2(Y) = \sigma^2.$$

Varianta 2. Media și momentul de ordinul 2 se obțin ușor, calculând derivatele în zero ale funcției caracteristice sau generatoare, ambele calcule fiind făcute ca în Teorema 3.2.1. ■

Teorema 3.2.3 *Dacă $X \sim N(0, \sigma^2)$, atunci*

$$M(X^{2k-1}) = 0, \quad (\forall) k \geq 1 \quad (3.41)$$

$$M(X^{2k}) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) \sigma^{2k} = \frac{(2k-1)!}{2^{k-1}(k-1)!} \sigma^{2k}, \quad \forall k \geq 1. \quad (3.42)$$

Demonstrație. Aplicând definițiile momentelor respective și integrând prin părți, obținem următoarea formulă de recurență:

$$M(X^k) = (k-1) \sigma^2 M(X^{k-2}), \quad k = 3, 4, \dots,$$

Însă $M(X) = 0$, $M(X^2) = D^2(X) = \sigma^2$, de unde prin înlocuiri succesive obținem imediat formulele din enunțul teoremei.

Ca alternativă de calcul, se observă ca aceeași formulă de recurență poate fi obținută si derivând funcția generatoare de momente (sau funcția caracteristică) asociată repartiției $N(0, \sigma^2)$. ■

Teorema 3.2.4 *Dacă $X_1, X_2, \dots, X_n$ sunt n variabile aleatoare independente astfel încât $X_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$, atunci*

$$\sum_{i=1}^n a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i m_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right),$$

oricare ar fi $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere reale.

Demonstrația acestei teoreme are la bază idei similare cu cele prezentate în cazul variantei 2 de demonstrare a Teoremei 3.1.1.

3.2.3 Repartiția Log-Normală

Definiția 3.2.3 Vom spune că o variabilă aleatoare X are o **repartiție Log-normală** de parametri a și σ , dacă X are densitatea de repartiție

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0. \quad (3.43)$$

Vom nota $X \sim \text{LogN}(a, \sigma^2)$.

Propoziția 3.2.7 Dacă $X \sim \text{LogN}(a, \sigma^2)$, atunci $\ln X \sim N(a, \sigma^2)$.

Propoziția 3.2.8 Dacă $X \sim \text{LogN}(a, \sigma^2)$, atunci

$$M(X) = e^{a + \frac{\sigma^2}{2}},$$

$$D^2(X) = e^{2a + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$$

Demonstrație. Rezultă imediat folosind legătura cu repartiția normală, și anume, notând $Y = \ln X \sim N(a, \sigma^2)$, avem $X = e^Y$, deci

$$M(X) = \varphi_Y(1) = e^{a + \frac{\sigma^2}{2}},$$

$$M(X^2) = \varphi_Y(2) = e^{2a + 2\sigma^2},$$

de unde, aplicând formula de calcul a dispersiei, obținem

$$D^2(X) = M(X^2) - M^2(X) = e^{2a + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$$

■

3.2.4 Repartiția Gamma

Definiția 3.2.4 Vom spune că o variabilă aleatoare reală X are **repartiția gamma** de parametri α și β ($\alpha > 0$, $\beta > 0$) dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\beta}} x^{\alpha-1} \cdot 1_{\mathbf{R}_+}(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad (3.44)$$

unde $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx$, $\forall \alpha > 0$ este funcția lui Euler.

Vom nota $X \sim \gamma(\alpha, \beta)$.

Folosind integrarea prin părți, se verifică ușor următoarea proprietate de recurență a funcției Γ :

$$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1), \quad \forall p > 1. \quad (3.45)$$

Se deduce imediat de aici că

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*. \quad (3.46)$$

Printr-un calcul direct sau făcând apel la proprietățile densității normalei standard, se deduce ușor și următoarea valoare importantă a funcției Γ :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (3.47)$$

În ce privește funcția caracteristică și funcția generatoare a repartiției Gamma, avem:

Propoziția 3.2.9 *Dacă $X \sim \gamma(\alpha, \beta)$, atunci*

$$m_X(t) = M(e^{tX}) = (1 - \beta \cdot t)^{-\alpha}, \quad (\forall) t < \frac{1}{\beta}, \quad (3.48)$$

iar funcția sa caracteristică

$$\varphi_X(t) = M(e^{itX}) = (1 - i\beta \cdot t)^{-\alpha}, \quad (\forall) t \in \mathbf{R}. \quad (3.49)$$

Deducem imediat din propoziția anterioară valoarea mediei, dispersiei, precum și a momentelor repartiției Gamma:

Propoziția 3.2.10 *Dacă $X \sim \gamma(\alpha, \beta)$, atunci*

$$M(X) = \alpha\beta, \quad (3.50)$$

$$D^2(X) = \alpha\beta^2, \quad (3.51)$$

$$M(X^r) = \frac{\beta^r \Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)}, \quad \forall r \in \mathbf{N}. \quad (3.52)$$

Folosind Propoziția 3.2.9, se poate acum ușor demonstra:

Teorema 3.2.5 *Fie X și Y două variabile aleatoare independente, cu repartițiile $\gamma(\alpha_1, \beta)$ și, respectiv, $\gamma(\alpha_2, \beta)$. Atunci variabila aleatoare $X + Y \sim \gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.*

3.2.5 Repartiția exponențială

Definiția 3.2.5 Vom spune că o variabilă aleatoare reală X are **repartiția exponențială** de parametru a ($a > 0$), dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ ae^{-ax}, & x > 0 \end{cases} . \quad (3.53)$$

Vom nota $X \sim \text{Exp}(a)$.

Observația 3.2.1 Se observă că repartiția $\text{Exp}(a)$ coincide cu repartiția $\gamma(1, \frac{1}{a})$, prin urmare proprietățile de bază ale repartiției $\text{Exp}(a)$ se pot deduce din cele ale repartiției Gamma.

Propoziția 3.2.11 Dacă $X \sim \text{Exp}(a)$, atunci funcția de repartiție F a lui X este

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-ax}, & x > 0 \end{cases} .$$

Propoziția 3.2.12 Dacă $X \sim \text{Exp}(a)$, atunci

$$P(\{t < X < s\} | \{t < X\}) = P(X < s - t), \text{ oricare ar fi } 0 < t < s. \quad (3.54)$$

Demonstrație. Din definiția probabilităților condiționate avem

$$P(\{t < X < s\} | \{t < X\}) = \frac{P(t < X < s)}{P(t < X)} = \frac{F(s) - F(t)}{1 - F(t)} = F(s - t).$$

■

Observația 3.2.2 Reciproc, se poate arăta că dacă X este o variabilă aleatoare continuă și pozitivă ce verifică relația (3.2.12), atunci X are o repartiție exponențială.

Propoziția 3.2.13 Dacă $X \sim \text{Exp}(a)$, atunci

$$M(X) = \frac{1}{a}, \quad (3.55)$$

$$D^2(X) = \frac{1}{a^2}. \quad (3.56)$$

Demonstrație. În acest caz particular al repartiției Gamma, se poate face și un calcul direct pentru determinarea mediei și dispersiei. Astfel, integrând prin părți, obținem imediat:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_0^{\infty} xae^{-ax} dx = \frac{1}{a}, \\ M(X^2) &= a \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} dx = -x^2 e^{-ax} \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-ax} dx = \\ &= \frac{2}{a} \int_0^{\infty} xae^{-ax} dx = \frac{2}{a} M(X) = \frac{2}{a^2}. \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$D^2(X) = \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}.$$

■

3.2.6 Repartiția χ^2

Definiția 3.2.6 Vom spune că o variabilă aleatoare reală X are **repartiția χ^2 cu n grade de libertate** dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} 1_{\mathbf{R}_+}(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}. \quad (3.57)$$

Vom nota $X \sim \chi^2(n)$.

Observația 3.2.3 Se observă că repartiția $\chi^2(n)$ coincide cu repartiția $\gamma(\frac{n}{2}, 2)$ și prin urmare, putem deduce proprietățile de bază ale repartiției $\chi^2(n)$ din cele ale repartiției Gamma. Vom rezuma în continuare aceste proprietăți.

Propoziția 3.2.14 Dacă $X \sim \chi^2(n)$, atunci

$$m_X(t) = M(e^{tX}) = (1 - 2 \cdot t)^{-\frac{n}{2}}, \quad (\forall) t < \frac{1}{2}, \quad (3.58)$$

iar funcția sa caracteristică

$$\varphi_X(t) = M(e^{itX}) = (1 - i \cdot 2 \cdot t)^{-\frac{n}{2}}, \quad (\forall) t \in \mathbf{R}, \quad (3.59)$$

Propoziția 3.2.15 Dacă $X \sim \chi^2(n)$, atunci

$$M(X) = n, \quad (3.60)$$

$$D^2(X) = 2n, \quad (3.61)$$

$$M(X^r) = 2^r \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + r)}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \quad \forall r \in \mathbf{N}. \quad (3.62)$$

Teorema 3.2.6 Dacă X și Y sunt două variabile aleatoare independente, care au respectiv repartițiile $\chi^2(n)$ și $\chi^2(m)$, atunci variabila aleatoare $X + Y$ este repartizată $\chi^2(m + n)$.

Foarte mult utilizată în statistică este următoarea caracterizare a repartiției $\chi^2(n)$:

Teorema 3.2.7 Dacă $X_1, \dots, X_n$ sunt n variabile aleatoare independente și identic repartizate,

$$X_i \sim N(0, 1), \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

atunci $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$.

Pornind de la această proprietate ajungem în mod natural la următoarea definiție pentru **Legea χ^2 descentrată**:

Definiția 3.2.7 Dacă $X_1, \dots, X_n$ sunt n variabile aleatoare independente astfel încât și identic repartizate,

$$X_i \sim N(m_i, 1), \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

atunci repartiția variabilei aleatoare $\sum_{i=1}^n X_i^2$ poartă numele de **repartiție χ^2 descentrată cu n grade de libertate și parametrul de excentricitate $\theta = \sum_{i=1}^n m_i^2$** . Notăm această repartiție $\chi^2(n, \theta)$.

În ce privește caracteristicile numerice de bază ale acestei repartiții, avem

Propoziția 3.2.16 Dacă $X \sim \chi^2(n, \theta)$, atunci

$$M(X) = n + \theta, \quad (3.63)$$

$$D^2(X) = 2(n + 2\theta). \quad (3.64)$$

3.2.7 Repartiția Student

Definiția 3.2.8 Vom spune că o variabilă aleatoare reală X are **repartiția Student** cu n grade de libertate dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad \forall x \in \mathbf{R}. \quad (3.65)$$

Vom nota $X \sim t(n)$.

Caracteristicile numerice esențiale ale acestei repartiții sunt:

Propoziția 3.2.17 Dacă $X \sim t(n)$ ($n > 2$), atunci

$$M(X) = 0 \text{ și } D^2(X) = \frac{n}{n-2}. \quad (3.66)$$

Legătura repartiției Student cu alte repartiții continue importante este dată de teorema următoare.

Teorema 3.2.8 Fie X și Y două variabile aleatoare independente repartizate $N(0, 1)$, respectiv $\chi^2(n)$. Atunci

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t(n). \quad (3.67)$$

Teorema precedentă dă o caracterizare importantă a repartiției Student, ce stă la baza diferitelor metode de testare a ipotezelor statistice.

3.2.8 Repartiția Fisher-Snedecor

Definiția 3.2.9 Vom spune că o variabilă aleatoare reală X are **repartiția Fisher-Snedecor** cu m și n grade de libertate, dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}) \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot x^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{mx}{n}\right)^{-\frac{m+n}{2}} 1_{\mathbf{R}_+}(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}. \quad (3.68)$$

Vom nota $X \sim F(m, n)$.

În ce privește media și dispersia acestei repartiții, avem:

Propoziția 3.2.18 Dacă $X \sim F(m, n)$, atunci

$$M(X) = \frac{n}{n-2} \quad (n > 2), \quad (3.69)$$

$$D^2(X) = \frac{2n^2(n+m-2)}{m(n-4)(n-2)^2} \quad (n > 4). \quad (3.70)$$

O altă caracterizare a repartiției $F(m, n)$, foarte importantă din punct de vedere statistic, este oferită de teorema următoare:

Teorema 3.2.9 *Dacă X și Y sunt două variabile aleatoare independente, repartizate $\chi^2(m)$, respectiv $\chi^2(n)$, atunci*

$$\frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}} \sim F(m, n).$$

Având în vedere acest rezultat, putem acum defini ușor repartițiile F descentrate:

Definiția 3.2.10 *Dacă X și Y sunt două variabile aleatoare independente, astfel încât $X \sim \chi^2(m, \theta)$ iar $Y \sim \chi^2(n)$, atunci repartiția variabilei aleatoare*

$$\frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}},$$

poartă numele de **repartiție Fisher-Snedecor descentrată, de parametru de excentricitate θ , cu m și n grade de libertate.**

3.3 Proprietăți asimptotice

3.3.1 Tipuri de convergențe

Fie $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ un șir de variabile aleatoare pe câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$.

Definiția 3.3.1 *Vom spune că șirul de variabile aleatoare $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge aproape sigur la o variabilă aleatoare X , dacă*

$$P(\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1. \quad (3.71)$$

Vom nota atunci $X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

Dăm în continuare câteva caracterizări ale acestui tip de convergență.

Propoziția 3.3.1 *Șirul de variabile aleatoare $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge aproape sigur la X , dacă și numai dacă pentru orice $\epsilon > 0$:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega : \bigcup_{k=n}^{\infty} |X_k(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon\}) = 0. \quad (3.72)$$

Teorema 3.3.1 (Lema Borel-Cantelli) *Fie $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un șir de variabile aleatoare. Dacă pentru orice $\epsilon > 0$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon) < \infty, \quad (3.73)$$

atunci $X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

Această teoremă oferă un criteriu simplu de convergență aproape sigură, destul de des folosit.

Definiția 3.3.2 *Vom spune că un șir $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de variabile aleatoare **converge complet** la o variabilă aleatoare X dacă pentru orice $\epsilon > 0$ avem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(\{\omega \in \Omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon\}) < \infty. \quad (3.74)$$

Notăm în acest caz $X_n \xrightarrow{c} X$.

Din lema Borel-Cantelli de mai sus este evident că

$$[X_n \xrightarrow{c} X] \Rightarrow [X_n \xrightarrow{a.s.} X]. \quad (3.75)$$

Reciproca nu este, în general, adevărată.

Definiția 3.3.3 *Vom spune că un șir $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de variabile aleatoare **converge în probabilitate** la o variabilă aleatoare X dacă pentru orice $\epsilon > 0$ avem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \epsilon\}) = 1. \quad (3.76)$$

Vom nota în acest caz $X_n \xrightarrow{P} X$.

Observația 3.3.1 Din definiția de mai sus rezultă că

$$X_n \xrightarrow{P} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{|X_n - X| \leq \epsilon\}) = 0, \quad \forall \epsilon > 0. \quad (3.77)$$

Propoziția 3.3.2 *Dacă $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, atunci $X_n \xrightarrow{P} X$.*

Demonstrație. Să considerăm următoarele evenimente aleatoare:

$$A_k = \{\omega \in \Omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon\}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Din cele spuse mai sus, avem:

$$X_n \xrightarrow{P} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0, \quad (3.78)$$

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0. \quad (3.79)$$

Astfel, datorită faptului că

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \geq P(A_n),$$

rezultă că

$$[X_n \xrightarrow{a.s.} X] \Rightarrow [X_n \xrightarrow{P} X]. \quad (3.80)$$

■

Reciproca acestei propoziții nu este, în general, adevărată, dar are loc următorul rezultat:

Teorema 3.3.2 (Sluțki) *Dacă un șir de variabile aleatoare este convergent în probabilitate, atunci el admite un subșir convergent aproape sigur.*

Definiția 3.3.4 *Vom spune că un șir $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de variabile aleatoare **converge în distribuție** (sau **în repartiție**) la o variabilă aleatoare X dacă*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x), \quad (3.81)$$

în orice punct x de continuitate al lui $F(\cdot)$, unde F este funcția de repartiție a lui X iar F_n reprezintă funcția de repartiție a lui X_n , $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$. Vom nota în acest caz $X_n \xrightarrow{D} X$.

Teorema 3.3.3 *Dacă un șir de variabile aleatoare este convergent în probabilitate la X , atunci el converge și în distribuție la X .*

Reciproca acestei teoreme nu este, în general, adevărată, dar are loc următorul rezultat:

Propoziția 3.3.3 *Dacă șirul de variabile aleatoare $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge în distribuție la o constantă c , atunci $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge și în probabilitate la c .*

3.4. LEGI ALE NUMERELOR MARI ȘI TEOREMA LIMITĂ CENTRALĂ 119

Definiția 3.3.5 Dacă $X, X_n \in \mathcal{L}^r(\Omega, \mathbf{R}) (r \geq 1)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, vom spune că X_n converge în medie de ordinul r la variabila aleatoare X și vom scrie $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^r} X$, dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|^r) = 0. \quad (3.82)$$

Cu alte cuvinte $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^r} X$ dacă $\|X_n - X\|_r \rightarrow 0$.

Teorema 3.3.4 Dacă un șir de variabile aleatoare este convergent în media de ordinul r la variabila aleatoare X , atunci el converge și în probabilitate la X .

Demonstrație. Folosind inegalitatea Markov (2.76), rezultă că:

$$P(|X_n - X| \geq \epsilon) \leq \frac{E(|X_n - X|^r)}{\epsilon^r} \quad (3.83)$$

pentru orice $\epsilon > 0$ și cum $\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|^r) = 0$, obținem prin trecere la limită rezultatul dorit. ■

Teorema 3.3.5 Dacă $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^r} X$ și dacă

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(|X_n - X|^r) < \infty, \quad (3.84)$$

atunci $X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

Dăm acum o scurtă sinteză a rezultatelor prezentate mai sus:

$$[X_n \xrightarrow{c} X] \Rightarrow [X_n \xrightarrow{a.s.} X] \Rightarrow [X_n \xrightarrow{P} X] \Rightarrow [X_n \xrightarrow{D} X] \quad (3.85)$$

și

$$[X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^r} X] \Rightarrow [X_n \xrightarrow{P} X] \Rightarrow [X_n \xrightarrow{D} X]. \quad (3.86)$$

3.4 Legi ale numerelor mari și Teorema Limită Centrală

Fie $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ un șir de variabile aleatoare reale, cu medii finite, definite pe câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$. Notăm $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Definiția 3.4.1 Vom spune că $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ verifică **legea slabă a numerelor mari** (prescurtat **LSNM**) dacă

$$\frac{S_n - M(S_n)}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n - (M(X_1) + \dots + M(X_n))}{n} \xrightarrow{P} 0. \quad (3.87)$$

Vom spune că $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ verifică **legea tare a numerelor mari** (prescurtat **LTNM**) dacă

$$\frac{S_n - M(S_n)}{n} \xrightarrow{a.s.} 0. \quad (3.88)$$

Teorema 3.4.1 (Cebâșev) Dacă $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este un șir de variabile aleatoare independente două câte două și cu dispersii egal mărginite, atunci $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ verifică **LSNM**.

Demonstrație. Dispersiile fiind egal mărginite, rezultă că există o constantă pozitivă c astfel încât

$$D^2 X_n \leq c, \forall n \geq 1.$$

Cum variabilele aleatoare din acest șir sunt independente două câte două, din formula (2.86) obținem

$$D^2(S_n) = \sum_{k=1}^n D^2 X_k \leq n \cdot c.$$

Utilizând acum inegalitatea lui Cebâșev pentru variabila aleatoare $X = \frac{S_n}{n}$, obținem

$$\begin{aligned} P\left(\frac{|S_n - M(S_n)|}{n} \geq \epsilon\right) &\leq \frac{D^2\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\epsilon^2} \\ &= \frac{D^2(S_n)}{n^2 \epsilon^2} \leq \frac{n \cdot c}{n^2 \epsilon^2} = \frac{c}{n \epsilon^2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează teorema. ■

Teorema 3.4.2 Fie $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ un șir de variabile aleatoare din $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbf{R})$, independente două câte două și identic repartizate. Atunci $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ verifică **LSNM**. Cu alte cuvinte,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} m,$$

unde m este media comună a variabilelor șirului.

3.4. LEGI ALE NUMERELOR MARI ȘI TEOREMA LIMITĂ CENTRALĂ 121

Demonstrație. Deoarece variabilele șirului sunt din $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbf{R})$ și sunt identic distribuite, rezultă că $D^2 X_n = \sigma^2$, $\forall n$ și prin urmare putem aplica Teorema 3.4.1 de mai sus, obținând astfel concluzia dorită. ■

Teorema 3.4.3 (Bernoulli) *Dacă $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este un șir de variabile aleatoare simple, independente două câte două și având tablourile de repartiție*

$$X_n \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ p & 1-p \end{array} \right), \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad (3.89)$$

atunci

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p.$$

Observația 3.4.1 Afirmația acestei teoreme este, desigur, echivalentă cu faptul că $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ verifică **LSNM** și ea fundamentează definiția statistică a probabilității, deoarece frecvența relativă a unui eveniment A , în cadrul unei experiențe aleatoare $\mathcal{E}$, poate fi scrisă sub forma $\frac{S_n}{n}$, unde X_n are repartiția (3.89) de mai sus (p reprezintă acum probabilitatea de realizare a lui A), X_n luând valoarea 1 dacă evenimentul A s-a realizat la cea de-a n repetare a experienței $\mathcal{E}$ și 0 în caz contrar, $\forall n \in \mathbf{N}^*$. În plus, în acest context, variabilele aleatoare din șirul $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sunt independente în totalitate și nu doar două câte două, așa cum cere Teorema 3.4.3.

Următorul rezultat generalizează Teorema 3.4.1:

Teorema 3.4.4 *Fie $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ un șir de variabile aleatoare din $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbf{R})$, independente două câte două. Dacă*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D^2(X_i) = 0, \quad (3.90)$$

atunci $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^}$ verifică **LSNM**.*

În ce privește legile tari ale numerelor mari, dăm în continuare două rezultate fundamentale:

Teorema 3.4.5 *Fie $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ un șir de variabile aleatoare independente din $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbf{R})$, Dacă*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^2(X_n)}{n^2} < \infty, \quad (3.91)$$

atunci $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^}$ verifică **LTNM**.*

Teorema 3.4.6 (Markov) Fie $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ un șir de variabile aleatoare din $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathbf{R})$, independente și identic distribuite. Atunci $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ verifică **LTNM**.

Rezultatele de mai sus analizează convergențele în probabilitate sau aproape sigure ale șirului sumelor standardizate de variabile aleatoare. Există, însă, și rezultate, foarte importante în statistică, care analizează convergența lor în distribuție. Pentru toate rezultatele de acest tip, se folosește termenul generic de **Teoremă limită centrală** (sau, pe scurt, **TLC**). Prezentăm în continuare o versiune simplificată a Teoremei limită centrală a lui **Lindeberg și Lévy**.

Teorema 3.4.7 Fie $X_1, X_2, \dots$ un șir de variabile aleatoare independente, identic repartizate, de dispersii finite și nenule și fie $\mu = M(X_n)$, $D^2(X_n) = \sigma^2$ și $S_n := X_1 + \dots + X_n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Atunci pentru orice x avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt. \quad (3.92)$$

Cu alte cuvinte, în condiții destul de generale, sumele standardizate de variabile aleatoare au aproximativ repartiția normală standard dacă numărul variabilelor sumate este foarte mare. O astfel de aproximare stă la baza foarte multor analize statistice a datelor experimentale.

3.5 Exerciții și probleme

- 30% din piesele produse de o mașină sunt defecte. Care este probabilitatea ca dintre 10 produse alese la întâmplare:
 - unul să fie defect;
 - cel mult trei să fie defecte?
- Dacă probabilitatea ca un articol să fie defect este de 0,2, să se calculeze media și dispersia numărului de articole defecte din 5 articole controlate. Notând cu X acest număr de articole defecte, determinați funcția de repartiție a lui X .
- Un om iese în stare de ebrietate dintr-un bar. La fiecare pas el se mișcă la dreapta cu un metru cu probabilitatea p sau la stânga cu probabilitatea $1 - p$. Fie X poziția sa după n pași. Arătați că $\frac{n+X}{2} \sim Bi(n, p)$. La câți metri de intrarea în bar ne așteptăm să fie acest om după n pași ?

4. Dacă $X_1 \sim Po(\lambda_1)$, $X_2 \sim Po(\lambda_2)$, cu $\lambda_2 > \lambda_1$, arătați că

$$P(X_1 \leq k) > P(X_2 \leq k), \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

5. Fie $X \sim Po(\lambda)$ și $(Y_i)_{i \geq 1}$ un șir de variabile aleatoare i.i.d., cu repartiția comună

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Să se arate că variabila aleatoare $\sum_{i=1}^X Y_i$ are o repartiție Poisson.

6. Fie $X : \Omega \rightarrow \mathbf{N}$ și $Y : \Omega \rightarrow \mathbf{N}$ două variabile aleatoare cu următoarele proprietăți:

1. $X \sim Po(\mu)$;
2. Pentru $n = 0, 1, 2, \dots$ are loc

$$P[\{Y = k\} | \{X = n\}] = \begin{cases} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} & \text{pentru } k = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{pentru } k > n \end{cases}$$

unde $0 < p < 1$. Determinați repartiția variabilei aleatoare Y .

7. Fie X o variabilă aleatoare a cărei funcție de repartiție F este strict crescătoare. Determinați repartiția variabilei aleatoare $Y = F(X)$.
8. Fie $X \sim U(0, 1)$. Determinați densitățile de repartiție și mediile variabilelor aleatoare $Y = X^2 + 1$; $Z = \sqrt{X + 1}$; $T = e^{X-1}$, $U = \ln(1 + X)$; $V = \sin \pi X$.
9. Fie $X \sim U(0, 2\pi)$ și fie $Y_1 = \cos X$ și $Y_2 = \sin X$. Determinați $\text{cov}(Y_1, Y_2)$. Sunt Y_1 și Y_2 independente?
10. Fie $(X_n)_{n \geq 1}$ un șir de variabile aleatoare discrete astfel încât X_n are tabloul de repartiție

$$X_n \begin{pmatrix} a+k & a+2k & \dots & a+nk \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

unde $a, k \in \mathbf{R}$. Să se arate că $M(X_n) = a + k \cdot \frac{n+1}{2}$, $\mu_2(X_n) = k^2 \cdot \frac{n^2-1}{12}$ și să se studieze convergența în repartiție a șirului de variabile aleatoare $(\frac{1}{n}X_n)_{n \geq 1}$.

11. Fie X variabila aleatoare care indică eroarea de măsurare a unui aparat. Știind că $X \sim N(0, \frac{1}{25})$, determinați probabilitatea ca din 5 măsurători independente, cel puțin două să fie din intervalul $(-0.2, 0.2)$.

12. Fie X variabila aleatoare care indică eroarea de măsurare a unui aparat. Știind că $X \sim N(0, \sigma^2)$, determinați (în funcție de Φ) probabilitatea ca media aritmetică a n măsurători independente să aparțină intervalului $(-\epsilon, \epsilon)$.
13. Presupunând că beneficiul zilnic al unui firme este o variabilă aleatoare $X \sim N(10^6, 100)$, să se calculeze:
 - (i) Probabilitatea ca beneficiul să fie mai mic de 750.000 lei
 - (ii) Probabilitatea ca beneficiul să fie cuprins între 950.500 și 1.500.000 lei.
14. Fie $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Calculați valoarea medie a variabilei aleatoare $Y = \max(X, \frac{1}{\lambda})$.
15. Durata de viață a unui anumit tip de imprimantă produs de o firmă este o variabilă aleatoare X cu repartiția $\text{Exp}(a)$. Știind că media de viață a imprimantelor de acest tip este de 10 ani, determinați parametrul a și calculați $P(5 \leq X < 8)$.
16. Dacă $X_1, X_2, \dots, X_n$ sunt i.i.d. și dacă $X_i \sim \text{Exp}(a)$, $\forall i = 1, \dots, n$, determinați densitățile și mediile următoarelor variabile aleatoare
 - 1) $X_1 + X_2, X_1 - X_2, \min(X_1, X_2)$.
 - 2) $X_1 + \dots + X_n$;
 - 3) $\max(X_1, \dots, X_n)$.
17. Unui vânzător de înghețată i se livrează zilnic o cantitate de înghețată spre comercializare. El știe că cererea de înghețată este o variabilă aleatoare repartizată exponențial. Prețul de cumpărare al unei unități de înghețată este de p_1 lei, iar cel de vânzare al aceleiași unități este de p_2 lei. La sfârșitul zilei se aruncă întreaga cantitate de înghețată nevândută. Câte unități de înghețată trebuie să comande vânzătorul în fiecare zi, astfel încât câștigul scontat să fie maxim?

Bibliografie

- [1] **Billingsley P.:** Probability and Measure, John Wiley&Sons, 1995
- [2] **Ciucu G., Craiu V., Săcuiu I.:** Probleme de teoria probabilităților, Ed. Tehnică, București, 1974
- [3] **Ciucu G., Sâmbuan G.:** Teoria Probabilităților și Statistică Matematică, Ed. Tehnică, București, 1962
- [4] **Ciucu G., Tudor C.:** Probabilități și Procese Stocastice, vol. I., Ed. Academiei, București, 1979
- [5] **Constantin Gh.:** Curs de Teoria Probabilităților și Statistică Matematică, Tip. Univ. Timișoara, 1977
- [6] **Constantin Gh. ș.a.:** Îndrumător pentru rezolvarea problemelor de teoria probabilităților, Tip. Univ. Timișoara, Partea I, 1980, Partea II, 1981
- [7] **Craiu, V.:** Teoria probabilităților cu exemple și probleme, Editura Fundația pentru România de mâine, București, 1997.
- [8] **Cuculescu I.:** Curs de Teoria Probabilităților, Tip. Univ. București, 1976
- [9] **Gnedenko B. V.:** The Theory of Probability, Mir Publishers, Moscow, 1973
- [10] **Grimmet G. R., Stirzaker D. R.:** Probability and Random Processes, Clarendon Press, Oxford, 1992
- [11] **Iaglom A. M., Iaglom I. M.:** Probleme neelementare tratate elementar, Ed. Tehnică, București, 1983
- [12] **Iosifescu M., Mihoc G., Theodorescu R.:** Teoria Probabilităților și Statistică Matematică, Ed. Tehnică, București, 1969
- [13] **Karr, A.F.:** Probability, Springer-Verlag, New York, 1993.

- [14] **Leonte A., Trandafir R.:** Clasic și Actual în Teoria Probabilităților, Ed. Dacia, Cluj Napoca, 1974
- [15] **Meschkowski, H.:** Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, B.I., Mannheim, 1972.
- [16] **Mihoc Gh., Micu N.:** Teoria Probabilităților și Statistică Matematică, Ed. Did. și Ped., București, 1980
- [17] **Onicescu O., Mihoc G., Ionescu Tulcea C. T.:** Calculul Probabilităților și Aplicații, Ed. Academiei, București, 1956
- [18] **Radu V.:** Calculul Probabilităților, Tip. Univ. Timișoara, 1986
- [19] **Radu V., ș. a.:** Elemente de Teoria Probabilităților și Aplicații, Editura Mirton, Timișoara, 1997.
- [20] **Ramm, B.; Hofmann, G.:** Biomathematik, Ferdinand Enke Verlag, 1976.
- [21] **Reischer C., Sâmbaoan A.:** Culegere de Probleme de Teoria Probabilităților și Statistică Matematică, Ed. Did. și Ped., București, 1972
- [22] **Schervish, M.J.:** Theory of statistics, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [23] **Spanos, A.:** Probability Theory and Statistical Inference, Cambridge University Press, 1999.